



Готуємось

до зовнішнього оцінювання

# Математика



ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ  
ВІДПОВІДІ

Видавництво



«Підручники  
і посібники»



*Анатолій Капіносів, Галина Білоусова, Галина Геп'юк,  
Сергій Мартинюк, Лариса Олійник, Петро Ульшин, Олег Чиж*

# МАТЕМАТИКА

**П о с і б н и к**  
**для підготовки**  
**до зовнішнього незалежного оцінювання**



Тернопіль

Видавництво «Підручники і посібники»

2010

УДК 361.37

М 33

Рецензенти: *Ярослав Гап'юк* — доцент кафедри математики та методики її викладання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

*Лілія Канакіна* — старший викладач кафедри дидактики природничо-математичних дисциплін Запорізького ОІ ППО

*Ярема Сень* — завідувач кабінету математики Рівненського ОІ ППО

*Людмила Корольська* — старший викладач кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету

Літературне редагування *Людмили Олійник*

Обкладинка *Оксани Корнєєвої*

**Капіносів А. М., Білоусова Г. І., Гап'юк Г. В., Мартинюк С. В., Олійник Л. І., Ульшин П. І., Чиж О. Й.**

**М 33** Математика: Посібник для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2010. — 400 с.

ISBN 978-966-07-1452-6

У першому розділі посібника подано поради щодо проходження зовнішнього незалежного оцінювання та збірці тестових зошитів, які пропонуються Українським центром оцінювання якості освіти.

Другий розділ містить довідковий матеріал і системи завдань з усіх тем шкільного курсу математики. Матеріал кожної теми складається з чотирьох частин. Перша частина містить довідковий теоретичний матеріал і збірці розв'язання вправ. Другу частину становлять тестові завдання закритої форми. У третій частині розміщені завдання на встановлення відповідності, а в четвертій — завдання на самостійне знаходження відповіді у вигляді десяткового дробу. Усі завдання однієї теми розміщені в порядку зростання складності.

Посібник призначений тим, хто проходитиме зовнішнє незалежне оцінювання з математики й учителям та учням старших класів.

УДК 361.37

ISBN 978-966-07-1452-6

© Капіносів А. М., Білоусова Г. І., Гап'юк Г. В.,  
Мартинюк С. В., Олійник Л. І., Ульшин П. І., Чиж О. Й., 2010

## ПЕРЕДМОВА

Протягом багатьох років Ви складали іспити, писали контрольні та самостійні роботи, відповідали на поставлені вчителем запитання тощо. Кожен із цих способів передбачав встановлення рівня Ваших знань, умінь та навичок. Ви уже звикли і пристосувались до таких видів контролю, вони вже не приносять Вам несподіванок. Ви знаєте: якщо будете неуважним і припуститесь помилки або описки чи зробите щось не так, але при цьому навчальним матеріалом володієте добре, то все, як правило, можна виправити — адже у Вас є можливість повторно поспілкуватися з учителем і переконати його в тому, що цей матеріал Ви знаєте і що то була лише прикра випадковість.

Правила зовнішнього незалежного оцінювання не передбачають жодних уточнень, пояснень, виправдань. Уважно ознайомтесь із процедурними правилами, щоб не втрачати дорогоцінних балів через «технічні» помилки. Працюючи з посібником, Ви ознайомитесь із корисними порадами та процедурними правилами: як краще розподілити свій час, які вправи розв'язувати першочергово, який порядок проходження оцінювання тощо.

Ви ознайомитесь з правилами роботи із бланками зовнішнього незалежного оцінювання. Це дозволить раціонально розподілити час при проходженні випробувань. Особливо уважно ознайомтесь із бланками відповідей та правилами їх заповнення. Адже всі розв'язані Вами завдання опрацююватиме комп'ютер і неправильне оформлення навіть правильної відповіді сприйматиметься як помилка.

Посібник укладено відповідно до програми й інструктивних документів зовнішнього незалежного оцінювання з математики, яке проводить Український центр оцінювання якості освіти.

Мета посібника — надати практичну, методичну та психологічну допомогу учням у їх підготовці до зовнішнього оцінювання.

Посібник містить два розділи:

### *Розділ 1*

- поради щодо підготовки і проходження зовнішнього незалежного оцінювання;
- взірць «заповненого учнем» тестового зошита і бланків відповідей до нього;
- взірць тестового зошита та бланків відповідей до нього для заповнення.

### *Розділ 2*

- довідковий теоретичний матеріал, збірник завдань з усіх тем шкільного курсу алгебри та початків аналізу і відповіді до них;
- довідковий теоретичний матеріал, збірник завдань з усіх тем шкільного курсу геометрії і відповіді до них.

### *Про розділ 1*

У розділі 1 подано зразок «заповненого учнем» варіанта тестового зошита, бланки відповідей до нього та розв'язання завдань. Зразок подано відповідно до інструкцій зовнішнього незалежного оцінювання знань. Це взірць того, як можна працювати з тестовим зошитом при проходженні ЗНО.

Тренувальний тестовий зошит за структурою, формою та змістом аналогічний до тестового зошита для зовнішнього незалежного оцінювання. Він допоможе ознайомитися з формами роботи, які передбачає зовнішнє оцінювання.

### Про розділ 2

Другий розділ містить довідковий теоретичний матеріал і збірник завдань з усіх тем шкільного курсу математики. Завдання кожної теми складаються з чотирьох частин. *Перша* частина містить довідковий теоретичний матеріал і взірці розв'язання вправ. *Друга* частина складена із тестових завдань закритої форми. Усі завдання розміщені в порядку зростання складності. Перші десять з них дозволяють швидко пригадати та закріпити базові знання з теми й, опираючись на них, успішно виконувати наступні, які відповідають рівням складності завдань зовнішнього оцінювання. *Третя* частина містить завдання, які передбачають установлення відповідності між деякими математичними поняттями та їхніми властивостями. У *четвертій* частині вміщено складніші тестові завдання на самостійне знаходження відповіді у вигляді десяткового дробу.

## «ЗОЛОТІ ПРАВИЛА» ДОСЯГНЕННЯ МАКСИМАЛЬНО МОЖЛИВОГО ДЛЯ ВАС РЕЗУЛЬТАТУ НА ЗНО

Якщо рівень Ваших знань такий, що Ви плануєте розв'язувати усі завдання, то встановіть для себе приблизний час, необхідний для виконання кожного завдання. Орієнтовно це може бути так: 3 хв на кожне із завдань 1–25, 5 хв на кожне із завдань 26–28, 7 хв на кожне із завдань 29–36.

Якщо ж Ваші знання є не надто ґрунтовними, то Вам не варто розпочинати роботу над розв'язуванням останніх завдань, а краще зосередитися на правильному розв'язанні перших 25-ти завдань, бо вони легші.

Якщо Ви зіткнулися із завданням, яке одразу не можете розв'язати, то не тратьте на нього зайвий час — переходьте до виконання наступного.

Урахуйте, що розв'язання геометричних завдань зазвичай потребує більших затрат часу.

Уважно читайте пояснення, які є в тестовому зошиті. Там вказано, що і як потрібно записувати до бланку відповідей.

Читайте умови завдань й одразу розв'яжуйте ті, які Вам цілком зрозумілі.

У кожному блоці завдання різні за складністю, але оцінюються однаковою кількістю балів, тому розв'яжуйте спочатку легші для Вас завдання.

Якщо Ви розв'язали частину завдань й упевнені у правильності їх розв'язання, а інші не знаєте, як розв'язати, і часу залишилося обмаль, то спробуйте в решті завдань угадати відповіді і внести їх до бланку відповідей. Використайте при цьому інтуїцію та скористайтеся «правдоподібністю» можливих відповідей.

Якщо Ви припустилися помилки, заповнюючи бланк відповідей, не закреслюйте помилку, а виправляйте її в спеціально відведеному для цього місці бланка.

## ЯК ПРАЦЮВАТИ З ТЕСТОВИМ ЗОШИТОМ

Нижче наведено приклади тестових зошитів, запропонованих Українським центром оцінювання якості освіти. Інструктивна частина тестових зошитів і змістовна частина першого з них подані у редакції Українського центру оцінювання якості освіти.

Щоб продемонструвати, як працювати з цими матеріалами, ми виступили в ролі особи, яка проходить зовнішнє оцінювання, записуючи у зошит і бланки відповідей усе, що відповідає інструкціям і що потрібно буде записувати при проходженні зовнішнього незалежного оцінювання. Звертаємо Вашу увагу на те, що записи завдань не є поясненнями їх розв'язання. Це чернові записи, які Ви проводитимете у зошиті, щоб знайти відповідь. Не буде помилки, якщо Ваші пояснення будуть коротшими чи повнішими від запропонованих. Тут важливо лише отримати правильну відповідь.

Зверніть особливу увагу на завдання 4 зошита 1. Воно розв'язане правильно, але у бланку відповідей ми спеціально «помилілися» і позначили неправильну відповідь, а потім показали, як потрібно виправити помилку.

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ

Щоб узяти участь у зовнішньому незалежному оцінюванні, слід зареєструватися. Реєстрація відбувається за місцем навчання або в регіональних центрах.

У запрошенні, яке Вам видадуть після реєстрації, буде зазначена точна інформація про час і місце проходження зовнішнього оцінювання.

Запрошення є перепусткою для проходження зовнішнього оцінювання, при цьому Вам також потрібно мати паспорт або документ, який його замінює.

Візьміть із собою ручку з пастою насиченого чорного кольору.

Під час проведення зовнішнього оцінювання інструктор може позбавити Вас права складати тест і випровадити з аудиторії за такі порушення:

- складання тесту за іншого учасника;
- використання будь-яких додаткових матеріалів;
- спілкування під час тестування з іншою особою;
- винесення завдань з аудиторії;
- покидання аудиторії без дозволу інструктора тощо.

Правильність відповідей завдань перевірятиме комп'ютер. Тому найважливішим для кінцевої оцінки є заповнення бланка відповідей.

Кожний тест (тестовий зошит) містить 36 завдань. Із 36 завдань 25 — це тестові завдання із закритою формою відповідей, 3 — на встановлення відповідності і 8 завдань — на самостійне знаходження відповіді у формі десяткового дробу.

На виконання усіх завдань відводиться 150 хвилин.

# РОЗДІЛ 1

## ШАНОВНІ ВИПУСКНИКИ!

Уважно опрацюйте перший «заповнений учнем» тестовий зошит і бланки відповідей до нього. У ньому подано оригінальні завдання, запропоновані Українським центром оцінювання якості освіти.

Після опрацювання першого «заповненого Вами» тестового зошита і бланків відповідей до нього самостійно розв'яжіть завдання другого тестового зошита. При цьому, як і на зовнішньому оцінюванні, користуйтеся лише посібником і ручкою.

Характер завдань і форма їх подання у зовнішньому оцінюванні суттєво відрізняється від шкільних завдань. У багатьох випадках форма подачі завдань має незвичний для Вас характер. Тому ми наполегливо радимо навіть тим, хто добре засвоїв математику, попрацювати з тренувальними завданнями хоча б для того, щоб освоїтися зі стилем і формою подачі завдань на зовнішньому незалежному оцінюванні.



## МАТЕМАТИКА

### ЗОВНІШНЄ НЕЗАЛЕЖНЕ ОЦІНЮВАННЯ

Час виконання — 150 хвилин

Екзаменаційний тест складається з трьох частин, у яких подано 36 завдань різної форми. Відповіді на завдання Ви маєте позначити в бланку відповідей. Правила виконання зазначені на початку кожної форми завдань.

#### Інструкція щодо роботи в тестовому зошиті

1. Відповідайте тільки після того, як Ви уважно прочитали та зрозуміли завдання й правила його виконання.
2. Використовуйте як чернетку місця, відведені у тестовому зошиті.
3. Намагайтеся відповісти на всі тестові завдання.

#### Інструкція щодо заповнення бланка відповідей

1. До бланку записуйте лише правильні, на Вашу думку, відповіді.
2. Відповіді вписуйте чітко, відповідно до інструкцій щодо кожної форми завдань.
3. Подвійні, неправильно записані, закреслені, підчищені та виправлені відповіді у бланку відповідей — це ПОМИЛКА!
4. Якщо Ви записали відповідь неправильно, можете її виправити у відведеному місці на бланку відповідей.
5. Ваш результат залежатиме від загальної кількості правильних відповідей, записаних до бланка відповідей.
6. Перш ніж виконувати завдання, позначте номер Вашого зошита у відповідному місці бланка.

*Успіху Вам!*

Завдання 1–25 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на Вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей. Не робіть інших позначок, тому що комп'ютерна програма реєструватиме їх як ПОМИЛКИ.

1. Молоко містить 3% білків. Скільки всього білків (у г) містить 600 г молока?

А	Б	В	Г	Д
1,8 г	18 г	20 г	180 г	200 г

2. Знайти координати вектора  $\overline{AB}$ , якщо  $A(-2; 3)$ ,  $B(-8; -5)$ .

А	Б	В	Г	Д
$\overline{AB}(6; 8)$	$\overline{AB}(-10; -8)$	$\overline{AB}(-10; -2)$	$\overline{AB}(-6; -2)$	$\overline{AB}(-6; -8)$

3. Задано геометричну прогресію  $(b_n)$ , для якої другий член  $b_2 = 12$  і знаменник  $q = -2$ . Знайти  $b_1$ .

А	Б	В	Г	Д
24	14	10	-6	-24

4. Довжина кола дорівнює 16π см. Знайти площу круга, обмеженого цим колом.

А	Б	В	Г	Д
$128\pi \text{ см}^2$	$64\pi \text{ см}^2$	$32\pi \text{ см}^2$	$16\pi \text{ см}^2$	$8\pi \text{ см}^2$

5. Відомо, що  $a < b$ . Серед наведених нерівностей указати правильну.

А	Б	В	Г	Д
$2a < -2b$	$\sqrt{2}a > \sqrt{2}b$	$\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$	$a - 4 > b - 4$	$0,5 - a > 0,5 - b$

6. Обчислити  $\frac{1}{3} \cdot 5,8 + \frac{1}{3} \cdot 8,3$ .

А	Б	В	Г	Д
3,7	4,07	4,7	4,9	47

7. Спростити вираз  $\sqrt[4]{a^6}$ , якщо  $a \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{a}$	$a^2$	$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[4]{a^6}$

8. Скільки всього граней у піраміді, яка має 12 ребер?

А	Б	В	Г	Д
4	6	7	12	13

9. Лучник здійснив 11 пострілів по мішені й набрав відповідно 6, 5, 7, 9, 6, 9, 10, 8, 7, 9, 10 очок. Знати моду цього ряду даних.

А	Б	В	Г	Д
5	7	8	9	10

10. Обчислити  $27^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{1}{4}}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	2	4	5	7

11. Знайти довжину ребра куба, площа поверхні якого дорівнює  $96 \text{ см}^2$ .

А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	4 см	6 см	8 см

12. Якщо  $\log_4 3 = a$ , то  $\log_{16} 9 =$

А	Б	В	Г	Д
$4a$	$a^2$	$2a$	$\frac{a}{2}$	$a$

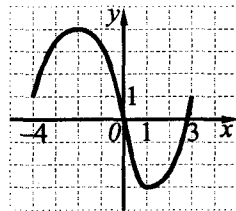
13. Розв'язати нерівність  $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 1)$	$(0; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(3; +\infty)$

14. Знайти об'єм конуса, якщо його радіус дорівнює 6 см, твірна — 10 см.

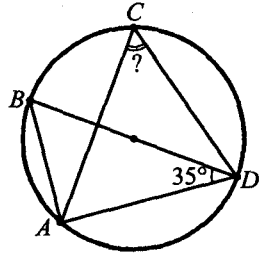
А	Б	В	Г	Д
$48\pi \text{ см}^3$	$60\pi \text{ см}^3$	$96\pi \text{ см}^3$	$120\pi \text{ см}^3$	$288\pi \text{ см}^3$

15. Функція  $y = f(x)$  визначена на всій числовій прямій і є періодичною з найменшим додатним періодом 7. На рисунку зображено графік цієї функції на відрізку  $[-4; 3]$ . Обчислити  $f(5)$ .



А	Б	В	Г	Д
4	1	0	-2	-3

16. Точки  $A, B, C$  і  $D$  лежать на колі.  $BD$  — діаметр цього кола (див. рисунок). Знайти величину кута  $ACD$ , якщо  $\angle ADB = 35^\circ$ .



А	Б	В	Г	Д
$35^\circ$	$55^\circ$	$60^\circ$	$65^\circ$	$70^\circ$

17. У лотереї 10 виграшних білетів і 290 білетів без виграшу. Яка ймовірність того, що перший придбаний білет цієї лотереї буде виграшним?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{29}$	$\frac{29}{30}$	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$

18. У магазині придбали 6 однакових зошитів і кілька ручок по 3 грн. за кожну з них. Яке з наведених чисел може виражати загальну вартість покупки (у грн.)?

А	Б	В	Г	Д
29	26	25	24	23

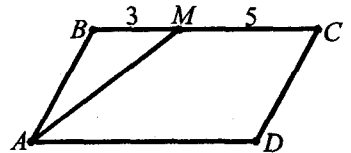
19. Знайти найменший додатний корінь рівняння  $2\sin x = -1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$

20. Знайти відстань від точки  $A(2; 3; 6)$  до осі  $Oz$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{13}$	7	6	5	$3\sqrt{5}$

21. Бісектриса гострого кута  $A$  паралелограма  $ABCD$  ділить сторону  $BC$  на відрізки  $BM = 3$  см і  $MC = 5$  см (див. рисунок). Знайти периметр паралелограма  $ABCD$ .



А	Б	В	Г	Д
18 см	20 см	22 см	24 см	26 см

16.  $\triangle ABD$  — прямокутний ( $\angle A = 90^\circ$ ),  $\angle B = 90^\circ - \angle D = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ .  $\angle C = \angle B = 55^\circ$ .  
Відповідь. Б.

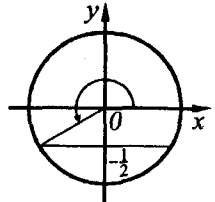
17.  $10 + 290 = 300$  (білетів) — усього білетів.  $p = \frac{10}{300} = \frac{1}{30}$ .

Відповідь. Г.

18.  $6x$  грн. — вартість зошитів;  $3y$  грн. — вартість ручок.  $6x + 3y = 3(2x + y)$  — вартість покупки, яка ділиться на 3.

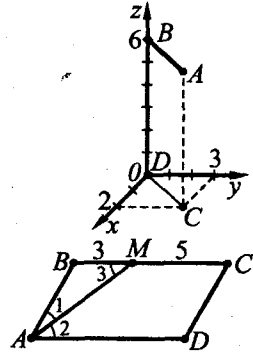
Відповідь. Г.

19.  $2\sin x = -1$ ;  $\sin x = -\frac{1}{2}$ ;  $x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + n\pi$ . Якщо  $n = 0$ , то  $x = -\frac{\pi}{6} < 0$ ; якщо  $n = 1$ , то  $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ .



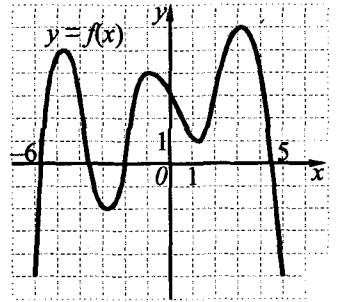
Відповідь. Д.

20.  $AB = CD = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ .  
Відповідь. А.



21.  $\angle 1 = \angle 2$ ;  $\angle 2 = \angle 3$ . Отже,  $\angle 1 = \angle 3$ .  
 $AB = BM = 3$ .  $P_{ABCD} = (3 + (3 + 5)) \cdot 2 = 22$  (см).  
Відповідь. В.

22. На рисунку зображено графік функції  $y = f(x)$ , яка визначена на проміжку  $(-6; 5)$ . У кожній точці цього проміжку існує похідна  $y' = f'(x)$ . Скільки всього коренів має рівняння  $f'(x) = 0$  на проміжку  $(-6; 5)$ ?



А	Б	В	Г	Д
один	два	три	чотири	п'ять

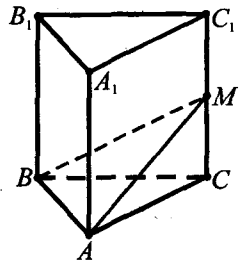
23. Скільки всього різних п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 3, 5, 7 (у числах цифри не повинні повторюватися)?

А	Б	В	Г	Д
5	24	25	96	120

24. У трикутнику  $ABC$ :  $AB = 6$  см,  $BC = \sqrt{2}$  см,  $\angle B = 45^\circ$ . Обчислити довжину медіани, проведеної з вершини  $C$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{5}$ см	$\sqrt{14}$ см	$2\sqrt{2}$ см	$\sqrt{7}$ см	$\sqrt{17}$ см

25. Об'єм прямої трикутної призми  $ABCA_1B_1C_1$  дорівнює  $48$  см<sup>3</sup>. Точка  $M$  — середина ребра  $CC_1$  (див. рисунок). Обчислити об'єм піраміди  $MABC$ .



А	Б	В	Г	Д
$6$ см <sup>3</sup>	$8$ см <sup>3</sup>	$12$ см <sup>3</sup>	$16$ см <sup>3</sup>	$24$ см <sup>3</sup>

Завдання 26–28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви). Усі інші види Вашого запису в бланку відповідей комп'ютерна програма реєструватиме як помилки!

26. Установити відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1  $(2a + b)^2$

2  $(2a - b)(b + 2a)$

3  $(a - 2b)^2$

4  $(a + 2b)(2a - b)$

А  $4a^2 - b^2$

Б  $4b^2 - 2ab + a^2$

В  $2a^2 + 3ab - 2b^2$

Г  $4a^2 + 4ab + b^2$

Д  $4b^2 - 4ab + a^2$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

27. Установити відповідність між геометричними перетвореннями графіка функції  $y = \cos x$  (1–4) та функціями, одержаними в результаті цих перетворень (А–Д).

1 Графік функції  $y = \cos x$  паралельно перенесли вздовж осі  $Ox$  на дві одиниці ліворуч

2 Графік функції  $y = \cos x$  паралельно перенесли вздовж осі  $Oy$  на дві одиниці вниз

3 Графік функції  $y = \cos x$  стиснули до осі  $Ox$  у два рази

4 Графік функції  $y = \cos x$  стиснули до осі  $Oy$  у два рази

А  $y = \cos(2x)$

Б  $y = \frac{1}{2} \cos x$

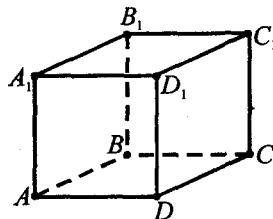
В  $y = \cos(x - 2)$

Г  $y = \cos(x + 2)$

Д  $y = \cos x - 2$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

28. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Установити відповідність між заданими кутами (1–4) та їхніми градусними мірами (А–Д).



1 Кут між прямими  $AA_1$  і  $DC_1$

2 Кут між прямими  $BD$  і  $A_1C_1$

3 Кут між прямими  $AB_1$  і  $A_1D$

4 Кут між прямими  $BB_1$  і  $DD_1$

А  $0^\circ$

Б  $30^\circ$

В  $45^\circ$

Г  $60^\circ$

Д  $90^\circ$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

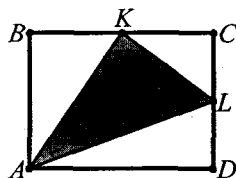
Розв'яжіть завдання 29–36. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

Пам'ятайте, що відповіді у бланку відповідей необхідно записувати лише десятковими дробами

29. Знайти значення виразу  $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$ , якщо  $\alpha = 15^\circ$ .

30. Розв'язати нерівність  $\frac{x^2 + 11x + 30}{x^2 + 3x - 10} < 0$ . У відповідь запишіть найменше ціле число, що задовольняє цю нерівність. Якщо такого числа немає, то у відповідь запишіть число 100.

31. У прямокутнику  $ABCD$ :  $AB = 6$  см,  $BC = 8$  см,  $K$  і  $L$  — середини сторін  $BC$  і  $CD$  відповідно (див. рисунок). Знайти площу трикутника  $AKL$  (у  $\text{см}^2$ ).



32. Знайти найменше значення функції  $y = x^3 - 12x$  на відрізку  $[0; 3]$ .



33. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = x^3$ ,  $y = 8$ ,  $x = 0$ .

34. Знайти найбільше значення параметра  $a$ , при якому система  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 81, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$  має єдиний розв'язок.

35. Розв'язати рівняння  $|\lg x + 1| - |\lg x - 3| = 2$ . Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше, ніж один корінь, то у відповідь запишіть суму всіх коренів.

36. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6. Бічне ребро піраміди нахилене до площини її основи під кутом  $60^\circ$ . Обчислити площу  $S$  сфери, описаної навколо піраміди. У відповідь запишіть значення  $\frac{S}{\pi}$ .

## МАТЕМАТИКА

### ЗОВНІШНЄ НЕЗАЛЕЖНЕ ОЦІНЮВАННЯ

**Час виконання — 150 хвилин**

Екзаменаційний тест складається з трьох частин, у яких подано 36 завдань різної форми. Відповіді на завдання Ви маєте позначити в бланку відповідей. Правила виконання зазначені на початку кожної форми завдань.

#### **Інструкція щодо роботи в тестовому зошиті**

1. Відповідайте тільки після того, як Ви уважно прочитали та зрозуміли завдання й правила його виконання.
2. Використовуйте як чернетку місця, відведені у тестовому зошиті.
3. Намагайтеся відповісти на всі тестові завдання.

#### **Інструкція щодо заповнення бланка відповідей**

1. До бланку записуйте лише правильні, на Вашу думку, відповіді.
2. Відповіді вписуйте чітко, відповідно до інструкцій щодо кожної форми завдань.
3. Подвійні, неправильно записані, закреслені, підчищені та виправлені відповіді у бланку відповідей — це ПОМИЛКА!
4. Якщо Ви записали відповідь неправильно, можете її виправити у відведеному місці на бланку відповідей.
5. Ваш результат залежатиме від загальної кількості правильних відповідей, записаних до бланка відповідей.
6. Перш ніж виконувати завдання, позначте номер Вашого зошита у відповідному місці бланка.

*Успіху Вам!*

Завдання 1–25 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише **ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ**. Виберіть правильну, на Вашу думку, відповідь і позначте її у бланку відповідей. Не робіть інших позначок, тому що комп'ютерна програма реєструватиме їх як **ПОМИЛКИ**.

1. Власна швидкість теплохода відноситься до швидкості течії річки як 34 : 5. Теплохід рухався 4 год 50 хв за течією річки. Скільки часу йому потрібно, щоб повернутися назад?

А	Б	В	Г	Д
5 год 40 хв	6 год	Не можна встановити	7 год	6 год 30 хв

2. Розв'язати рівняння:  $|2x - 3| = 3 - 2x$ .

А	Б	В	Г	Д
Будь-яке число	$(-\infty; 1,5]$	1,5	Немає коренів	$[1,5; +\infty)$

3. Скоротити дріб  $\frac{a^3 + a^2 - a - 1}{a^2 + 2a + 1}$ .

А	Б	В	Г	Д
Інша відповідь	$a - 1$	$\frac{a-1}{a+1}$	$\frac{a^3}{2}$	$a^2 - 1$

4. Знайти найбільший розв'язок нерівності  $(x + 2)^2 \leq x^2 + 16$ .

А	Б	В	Г	Д
2	3	Найбільшого розв'язку не існує	2,9	Інша відповідь

5. До параболи  $y = x^2 + mx - 9$  проведена дотична під кутом  $45^\circ$ . За якого значення параметра  $m$  абсциса точки дотику дорівнює  $-5$ ?

А	Б	В	Г	Д
11	-9	4,8	Інша відповідь	$10 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

6. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності  $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-1}(x-9) < 0$ .

А	Б	В	Г	Д
1	9	8	-2	Не існує

7. Визначити кількість додатних коренів рівняння  $\cos(2x) = -1$ , які не перевищують числа 9.

А	Б	В	Г	Д
3	2	1	4	Інша відповідь

8. Обчислити:  $\frac{(0,26)^0 - (0,2)^{-1}}{(8:5^3)^{-1} \cdot 0,4^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{15}$	Інша відповідь	4	-4	2

9. Розв'язати рівняння  $\log_x(x+2) = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
-1; 2	2	-1	Інша відповідь	-2

10. Знайти область визначення функції  $f(x) = \frac{25}{3 - \sqrt[4]{x}}$ .

А	Б	В	Г	Д
Інша відповідь	$[0; +\infty)$	$[0; 81) \cup (81; +\infty)$	$(-\infty; 81) \cup (81; +\infty)$	$(81; +\infty)$

11. Спростити вираз  $\frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	$\text{tg}^2 \alpha$	$\text{ctg}^2 \alpha$	$\frac{1}{\sin^2 \alpha}$	$\cos^6 \alpha$

12. Розв'язати нерівність:  $16 \leq 2^{x+3}$ .

А	Б	В	Г	Д
-3	$[7; +\infty)$	$(-\infty; -1]$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 1]$

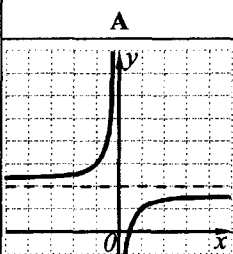
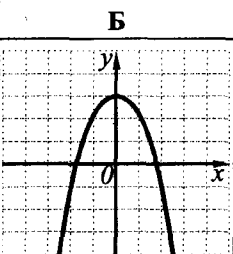
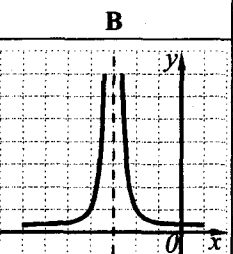
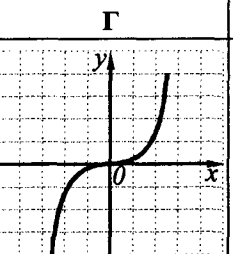
13. Знайти первісну  $F$  функції  $f(x) = e^x + 4x^3$ , якщо відомо, що  $F(0) = -1$ .

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = e^x + 3x^4 - 2$	$F(x) = e^x + x^4 - 2$	$F(x) = e^x + 12x^2 - 2$	$F(x) = -e^x + 12x^2$	$F(x) = e^x + x^4 + C$

14. Знайти п'ятий член геометричної прогресії, якщо перший її член дорівнює 10, а знаменник — 0,1.

А	Б	В	Г	Д
$10^{-5}$	100000	0,01	0,001	5

15. На якому рисунку зображено графік непарної функції?

А	Б	В	Г	Д
				Графіка непарної функції не існує

16. Зі слова «математика» навмання вибирають одну літеру. Яка ймовірність того, що виберуть літеру «а»?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$	Інша відповідь	$\frac{3}{10}$

17. Довжина гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює  $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ . Обчислити площу круга, описаного навколо цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{\pi}$	$4\sqrt{\pi}$	4	1	$2\pi$

18. Довжина діагоналі куба дорівнює  $5\sqrt{3}$ . Обчислити об'єм куба.

А	Б	В	Г	Д
375	$375\sqrt{3}$	125	75	Інша відповідь

19. Осьовий переріз конуса — правильний трикутник, площа якого дорівнює  $9\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. Обчислити твірну конуса.

А	Б	В	Г	Д
6 см	Інша відповідь	$3\sqrt{3}$ см	3 см	9 см

20. Знайти довжину вектора  $\vec{m} = -2\vec{a}$ , якщо  $\vec{a}(1; 2; 2)$ .

А	Б	В	Г	Д
3	6	8	36	$\sqrt{10}$

21. Тіло рухається прямолінійно у вертикальному напрямі за законом  $h(t) = 2 + 9t - 5t^2$  ( $t$  — час руху в секундах,  $h$  — відстань від землі до тіла в метрах). Визначити у метрах за секунду початкову швидкість руху тіла.

А	Б	В	Г	Д
0,9	9	2	$6\frac{1}{20}$	Інша відповідь

22. Пряма, яка проходить через початок координат, є дотичною до графіка функції  $y = f(x)$  у точці  $A(-7; 14)$ . Знайти  $f'(-7)$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	0	2

23. Знайти значення виразу  $2\sqrt{5} \operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{2}{3}\right)$ .

А	Б	В	Г	Д
5	$\frac{4\sqrt{5}}{3}$	1	$\frac{4}{3}\sqrt{15}$	Не існує

24. Знайти мінімум функції  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$ .

А	Б	В	Г	Д
Не існує	$-3 \pm \sqrt{19}$	-9,5	0	-3

25. Скільки цілих чисел належать області допустимих значень функції  $y = \sqrt{-\log_7(x^2 - 3x + 3)}$  ?

А	Б	В	Г	Д
Безліч	1	2	[1; 2]	Таких чисел не існує

Завдання 26–28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в бланку відповідей на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви). Усі інші види Вашого запису в бланку відповідей комп'ютерна програма ресеструватиме як помилки!

26. Установити відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1  $a^3 + (2b)^3$

2  $(2a)^3 + b^3$

3  $(2a + b)^3$

4  $(a + 2b)^3$

А  $(a + 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$

Б  $(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$

В  $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$

Г  $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

Д  $(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

27. Установити відповідність між заданими рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$

2  $|x| = -2$

3  $\sqrt{x^2} = 2$

4  $x^2 - 5x + 6 = 0$

А {2; 3}

Б {-2}

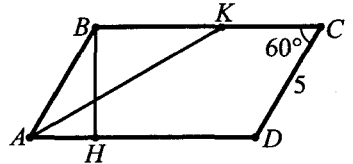
В {-2; 2}

Г  $\emptyset$

Д {2}

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

28. На рисунку зображено паралелограм  $ABCD$ , його висоту  $BH$ , бісектрису  $AK$  кута  $A$  й позначено величини деяких його елементів. Установити відповідність між заданими елементами паралелограма (1–4) та їхніми величинами (А–Д).



1  $BK$

2  $\angle AKC$

3  $P_{\Delta AVK}$

4  $BH$

А  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Б  $10 + 5\sqrt{3}$

В  $150^\circ$

Г  $120^\circ$

Д 5

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Розв'яжіть завдання 29-36. Одержані відповіді запишіть у зошиті та бланку відповідей.

**Пам'ятайте, що відповіді у бланку відповідей необхідно записувати лише десятковими дробами**

29. Визначити значення параметра  $a$ , за якого рівняння  $(x+a)^2 + 2x^2 + 20x + 50 = 0$  має єдиний корінь.
30. Знайти значення виразу  $2^x - y$ , якщо  $(x, y)$  є розв'язком системи рівнянь 
$$\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2; \\ 2^{x+1} - 3y = 43. \end{cases}$$
31. У рівнобічній трапеції діагональ ділить її тупий кут навпіл. Скільки квадратних сантиметрів містить трапеція, якщо її периметр дорівнює 42 см, а менша основа — 3 см.
32. Вклад, який лежить у банку з початку року, зростає до кінця року на 10%. Вкладник вніс на початку 2008 року 500 грн., 600 грн. — на початку 2009 року, 700 грн. — на початку 2010 року. Скільки гривень прибутку отримає вкладник наприкінці 2010 року?
33. Скільки коренів має рівняння  $\frac{\lg(\sin^2 x)}{\lg(25 - x^2)} = 0$  ?
34. Обчислити площу фігури, розташовану в першій координатній чверті й обмежену лініями  $y = 2\sqrt[3]{x}$ ,  $y = x$ .
35. Двогранні кути при основі правильної чотирикутної піраміди дорівнюють  $45^\circ$ , а площа її бічної поверхні —  $36\sqrt{2}$ . Знайти у кубічних сантиметрах об'єм піраміди.
36. За якого значення параметра  $a$  функція  $f(x) = (a+2)x^2 + (5a-4)x + 2a$  буде парною?

# Бланки відповідей зовнішнього незалежного оцінювання

Міністерство освіти і науки України  
Український центр оцінювання якості освіти

Місце штрих-коду роботи.  
Наклеює Інструктор.

Увага!  
Цей бланк перевіряє комп'ютер! Ваші відповіді у бланку є результатом Вашої роботи.  
Записана цифра не має виходити за межі білого прямокутника. Виправлення та позначення кількох відповідей в одному завданні — помилка!  
Виправлення необхідно робити у спеціально відведеній частині бланка!

### Математика

Позначте номер Вашого зошита так:  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15

Увага! Позначайте тільки один варіант відповіді у рядку варіантів відповідей до кожного завдання. Дотримуйтесь, будь ласка, правил запису відповідей. У завданнях 29-36 правильну відповідь записуйте, враховуючи положення коми, по одній цифрі в кожному білому прямокутнику. Знак "мінус" записуйте в окремому білому прямокутнику ліворуч від цифри.

Наприклад: правильно записане число 2 матиме такий вигляд:  

2			

 чи так: 

2	0
---	---

правильно записане число 2,5 матиме такий вигляд:  

2	5		

правильно записане число -2,05 матиме такий вигляд:  

-	2	0	5

**2**

--	--	--

**5**

--	--	--

**2**

--	--	--

**5**

--	--	--

**2**

--	--	--

**5**

Якщо Ви вирішили змінити відповідь у деяких завданнях, то правильну відповідь можна позначити у спеціально відведених клітинках, розташованих унизу бланка відповідей.

У завданнях 1-28 правильну відповідь позначайте тільки так:

1	А Б В Г Д	6	А Б В Г Д	11	А Б В Г Д	16	А Б В Г Д	21	А Б В Г Д																									
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>						
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>						
3		8		13		18		23																										
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>						
5		10		15		20		25																										
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>							<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>						
26		27		28																														
А Б В Г Д		А Б В Г Д		А Б В Г Д																														
1	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>						1	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>						1	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>																			
2	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>						2	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>						2	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>																			
3	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>						3	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>						3	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>																			
4	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>						4	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>						4	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>																			

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 -

У завданнях 29-36 відповідь записуйте тільки десятковим дробом, враховуючи положення коми, по одній цифрі в кожній клітинці.

--	--	--	--

Місце виправлення помилкової відповіді.  
Щоб виправити відповідь до завдання, запишіть його номер у відповідних клітинках.

Завдання 1-28


Завдання 29-36


## РОЗДІЛ 2

### АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

#### ТЕМА 1. ОБЧИСЛЕННЯ. АРИФМЕТИЧНІ ЗАДАЧІ

**Натуральні числа** — це числа, які використовують при лічбі: 1, 2, 3, ... . Множину натуральних чисел позначають буквою  $N$ .

**Цілі числа** — це натуральні числа, числа протилежні до них та число нуль. Наприклад, цілими є числа  $-2, 4, 0$  тощо. Множину цілих чисел позначають буквою  $Z$ .

**Раціональні числа** — це числа, які можна подати у вигляді  $\frac{m}{n}$ , де  $m$  — ціле число ( $m \in Z$ ),  $n$  — натуральне число ( $n \in N$ ). Кожне раціональне число можна представити у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу. Наприклад, раціональними є числа  $4,5; -3; -7,3; \frac{3}{4}; -2\frac{7}{9}$  тощо. Множину раціональних чисел позначають буквою  $Q$ .

**Іраціональні числа** — це нескінченні десяткові неперіодичні дробі. Наприклад, іраціональними є числа  $\sqrt{5}, \cos 7^\circ, \pi$  тощо. Множину іраціональних чисел позначають буквою  $I$ .

**Дійсні числа** — це раціональні та іраціональні числа. Кожне дійсне число можна зобразити точкою на числовій осі, а кожній точці осі відповідає дійсне число. Множину дійсних чисел позначають буквою  $R$ .

**Найбільшим спільним дільником (НСД)** кількох натуральних чисел називають найбільше число, на яке дані числа діляться без остачі. НСД даних чисел дорівнює добутку спільних простих множників цих чисел.

**Приклад 1.** Знайти НСД(120; 220).

■  $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, 220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$ . Тоді  $\text{НСД}(120; 220) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ . ■

**Найменшим спільним кратним (НСК)** кількох натуральних чисел називають найменше число, яке ділиться без остачі на кожне з даних чисел. НСК даних чисел дорівнює добутку одного з них на прості множники, яких нема у його розкладі, але є у розкладах решти чисел.

**Приклад 2.** Знайти НСК(28; 16; 10).

■  $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7; 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2; 10 = 2 \cdot 5$ . Отже,  $\text{НСК}(28; 16; 10) = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 560$ . ■

**Модулем (абсолютною величиною) дійсного числа  $a$**  називають саме це число, якщо воно невід'ємне ( $a \geq 0$ ), і протилежне йому число, якщо воно від'ємне ( $a < 0$ ), тобто:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Наприклад,  $|13| = 13; |-9| = 9; |0| = 0; |\sqrt{5} - 10| = -(\sqrt{5} - 10) = 10 - \sqrt{5}$ .

Модуль числа  $a$  дорівнює відстані на числовій осі від початку відліку до точки, яка позначає число  $a$ .

**Звичайним дробом** називають число виду  $\frac{m}{n}$ , де  $m$  та  $n$  — натуральні числа. Риска

дробу означає дію ділення:  $\frac{m}{n} = m : n$ .

**Основна властивість дроби:** якщо чисельник і знаменник дроби помножити чи поділити на одне й те саме натуральне число, то отримаємо дріб, який дорівнює даному. Напри-

$$\text{клад, } \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{4}{24}; \quad \frac{100}{70} = \frac{100 : 2}{70 : 2} = \frac{50}{35}.$$

**Скороченням дроби** називають ділення чисельника і знаменника дроби на їх спільний дільник, відмінний від одиниці. Найбільше число, на яке можна скоротити дріб, — найбільший спільний дільник чисельника і знаменника, і, якщо він дорівнює 1, то дріб називають **нескоротним**. Наприклад, дріб  $\frac{100}{70}$  скоротний, бо  $\frac{100}{70} = \frac{100 : 10}{70 : 10} = \frac{10}{7}$ , а дріб  $\frac{9}{13}$  — нескоротний.

Заміну дробів з різними знаменниками відповідно рівними їм дробами з однаковими знаменниками називають **зведенням дробів до спільного знаменника**. Найменшим спільним знаменником дробів є найменше спільне кратне їх знаменників.

**Дії над звичайними дробами.**

- **Додавання і віднімання.** Сумою (різницею) дробів з однаковими знаменниками є дріб, чисельник якого є сумою (різницею) чисельників цих дробів, а знаменник дорівнює їх знаменникам:  $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$  ( $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ ). Щоб додати (відняти) дроби з різними знаменниками, треба їх спочатку звести до спільного знаменника.
- **Множення.** Добутком дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник — добутку знаменників даних дробів:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ .
- **Ділення.** Часткою двох дробів є дріб, який дорівнює добутку дроби-діленого та оберненого числа до дроби-дільника:  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ .

**Десятковий дріб** — інша форма запису звичайного дроби зі знаменником  $10^n$ , де  $n$  — натуральне число. Наприклад,  $\frac{4}{10} = 0,4$ ;  $\frac{53}{1000} = 0,053$ ;  $\frac{609}{10} = 60,9$ .

**Дії над десятковими дробами.**

- **Додавання, віднімання.** Щоб додати або відняти десяткові дроби, треба їх записати так, щоб однакові розряди були один під одним (або «кома під комою») і виконати дію. Якщо необхідно, то до одного з дробів можна дописати нулі. Наприклад, знайдемо суму  $16,8 + 0,5347$ :

$$\begin{array}{r} 16,8000 \\ + 0,5347 \\ \hline 17,3347 \end{array}$$

- **Множення.** Множать десяткові дроби, не зважаючи на коми, як натуральні числа, а в добутку відділяють комою праворуч стільки цифр, скільки їх є після коми в обох множниках разом. Наприклад,

$$\begin{array}{r} \times 1,35 \\ 0,006 \\ \hline 0,00810 \end{array}$$

- **Ділення.** Щоб поділити десяткові дроби, спочатку їх домножають на  $10^n$ , де  $n$  — кількість цифр після коми в дільнику і перетворюють дільник у натуральне число. Кому в частці ставлять після завершення ділення цілої частини діленого. Наприклад, поділимо 3,12 на 2,6:

$$\begin{array}{r} 3,12 : 2,6 = 31,2 : 26 \\ \underline{26} \quad | \quad 26 \\ 52 \quad | \quad 1,2 \\ \underline{52} \\ 0 \end{array}$$

Кожен звичайний дріб можна подати у вигляді скінченного або нескінченного десяткового дробу. Для цього потрібно чисельник поділити на знаменник. Наприклад,

$$\frac{14}{11} = 1,272727\dots, \quad \frac{7}{12} = 0,583333\dots, \quad \frac{3}{8} = 0,375.$$

**Періодом нескінченного десяткового дробу** називають найменшу групу цифр після коми десяткового дробу, яка повторюється. Період записують раз, поміщаючи його в круглі дужки, наприклад,  $1,272727\dots = 1,(27)$ ;  $0,583333\dots = 0,58(3)$ ;  $0,375 = 0,375000\dots = 0,375(0)$ . Нескінченний десятковий дріб, який має у своєму запису період, називають **періодичним**.

Кожен нескінченний десятковий періодичний дріб можна подати у вигляді звичайного.

**Приклад 3.** Подати у вигляді звичайного дробу число  $0,58(3)$ .

■ Нехай  $a = 0,58(3) = 0,583333\dots$ . Період цього дробу складається з однієї цифри. Помножимо число  $a$  на 10:  $10a = 5,833333\dots$ . Обчислимо різницю:  $10a - a = 5,833333\dots - 0,583333\dots$ ;  $9a = 5,25$ ;  $a = \frac{5,25}{9} = \frac{525}{900} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ . Отже,  $0,58(3) = \frac{7}{12}$ .

Відповідь.  $\frac{7}{12}$ . ■

**Пропорцією** називають рівність двох часток (відношень):  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , або  $a : b = c : d$ . Числа  $a$  та  $d$  називають крайніми членами пропорції,  $b$  та  $c$  — середніми членами пропорції.

**Основна властивість пропорції:** добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх її членів:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Завдання 1.1–1.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

1.1. Яке з наведених чисел кратне числу 9?

А	Б	В	Г	Д
978999	100009	199999	253647	3333333

1.2. Знайти найбільший спільний дільник чисел 42 і 63.

А	Б	В	Г	Д
126	3	7	9	21

1.3. Знайти найменше спільне кратне чисел 28 і 35.

А	Б	В	Г	Д
7	140	70	175	280

1.4. Обчислити:  $1,521 : 0,3 - 1,9 \cdot 0,3$ .

А	Б	В	Г	Д
0	-0,063	5,13	4,5	-0,63

1.5. Обчислити:  $2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{12}{25} : \frac{3}{20}$ .

А	Б	В	Г	Д
3,575	3,7	4,7	5,7	4,07

1.6. Обчислити:  $4\frac{2}{3} - 6\frac{3}{7} - \left(-1\frac{2}{9}\right) + 5\frac{10}{21}$ .

А	Б	В	Г	Д
$11\frac{23}{63}$	$4\frac{29}{63}$	$4\frac{59}{63}$	$-4\frac{29}{63}$	$3\frac{4}{63}$

1.7. Обчислити:  $-4,8 : (-2,6 + 3,4) + 0,8$ .

А	Б	В	Г	Д
-7,2	-6,8	6,8	-5,2	5,2

1.8. Знайти невідомий член пропорції  $(5x - 7) : 12 = 2 : 3$ .

А	Б	В	Г	Д
3	2	7	4	6

1.9. Вказати найбільше з наведених чисел.

А	Б	В	Г	Д
0,23	0,(23)	0,233	0,2(3)	0,2(31)

1.10. Вказати звичайний дріб, який дорівнює дробу  $0,1(3)$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{13}{100}$	$\frac{13}{99}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{15}$

1.11.  $|\pi - 4| = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\pi - 4$	$\pi + 4$	$-4\pi$	$4 - \pi$	$4\pi$

1.12. Не виконуючи ділення, встановити остачу від ділення 3333333341 на 9.

А	Б	В	Г	Д
1	5	14	4	41

1.13. Швидкість равлика дорівнює  $\frac{1}{12}$  м/хв. Яку відстань проповзе равлик за  $6\frac{1}{4}$  години?

А	Б	В	Г	Д
0,75 м	31,25 м	75 м	$\frac{25}{48}$ м	$52\frac{1}{12}$ м

1.14. Із 68 жовтих і 85 червоних троянд склали букети, розділивши жовті та червоні троянди в усі букети порівну. Скільки найбільше букетів можна одержати?

А	Б	В	Г	Д
9	20	34	17	8

1.15. Яка найменша кількість метрів тканини може бути в рулоні, щоб його можна було продати без залишку по 6 м, по 8 м або по 10 м?

А	Б	В	Г	Д
480	60	120	240	4800

1.16. За три дні зорано 1800 га поля. За перший день зорано  $\frac{2}{9}$  поля, а за другий —  $\frac{1}{6}$  поля.

Скільки гектарів поля було зорано за третій день?

А	Б	В	Г	Д
1100	700	1200	800	900

1.17. За перший день турист пройшов  $\frac{4}{9}$  усього шляху, а за другий — решту —  $26\frac{2}{3}$  км.

Яку відстань пройшов турист за два дні?

А	Б	В	Г	Д
$46\frac{1}{4}$ км	$54\frac{1}{3}$ км	60 км	$56\frac{1}{4}$ км	48 км

1.18. Басейн наповнюється через першу трубу за 4 години, а через другу — за 6 годин. Яку частину басейну залишиться наповнити після спільної роботи обох труб протягом 2 годин?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{10}$

1.19. Басейн заповнюють водою через першу трубу за  $a$  годин, через другу — за  $b$  годин.

Через скільки годин можна заповнити басейн при використанні обох труб разом?

А	Б	В	Г	Д
$a + b$	$a - b$	$ab$	$\frac{ab}{a + b}$	$\frac{a + b}{ab}$

1.20. Майстер виготовляє одну деталь за 5 хв, а його учень таку ж деталь — за 9 хв. Працюючи разом, вони виготовили 42 деталі. Скільки деталей виготовив майстер?

А	Б	В	Г	Д
28	32	30	27	25

1.21. Добуток двох послідовних парних натуральних чисел дорівнює 728. Знайти суму цих чисел.

А	Б	В	Г	Д
56	66	54	32	28

1.22. В одному місті всі мешканці розмовляють англійською або французькою мовою. Англійською мовою розмовляє 90% усіх мешканців, французькою — 80%. Скільки відсотків мешканців володіє лише однією мовою?

А	Б	В	Г	Д
70%	60%	30%	20%	10%

Завдання 1.23–1.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

1.23. Установити відповідність між числами (1–4) та їх остачами від ділення на 9 (А–Д).

1 53229465	А 2
2 81720245	Б 3
3 33333332	В 4
4 33333016	Г 5
	Д 0

1.24. Установити відповідність між числами (1–4) та їх записами у стандартному вигляді (А–Д).

1 73,4	А $7,34 \cdot 10^{-3}$
2 734	Б $7,34 \cdot 10^{-2}$
3 0,734	В $7,34 \cdot 10^{-1}$
4 0,00734	Г $7,34 \cdot 10$
	Д $7,34 \cdot 10^2$



1.25. Установити відповідність між періодичними десятковими дробами (1–4) та їх записами у вигляді звичайних дробів (А–Д).

- |           |                     |
|-----------|---------------------|
| 1 0,(6)   | А $\frac{241}{330}$ |
| 2 0,1(6)  | Б $\frac{7}{30}$    |
| 3 0,2(6)  | В $\frac{3}{5}$     |
| 4 0,7(30) | Г $\frac{2}{3}$     |
|           | Д $\frac{1}{6}$     |

1.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |                            |              |
|----------------------------|--------------|
| 1 $ \pi - 4  +  \pi - 3 $  | А $2\pi - 7$ |
| 2 $ 3 - \pi  -  -\pi - 4 $ | Б 7          |
| 3 $- \pi - 4  -  \pi - 3 $ | В 1          |
| 4 $ \pi - 4  +  -\pi - 3 $ | Г -1         |
|                            | Д -7         |

1.27. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |  |          |
|--|----------|
| 1 $1000 \cdot 0,02 + 100 \cdot 0,004 + 10 \cdot 0,0003$    | А 2,0403 |
| 2 $1000 \cdot 0,02 + 100 \cdot 0,04 + 10 \cdot 0,0003$     | Б 2,4003 |
| 3 $10000 \cdot 0,02 + 1000 \cdot 0,004 + 100 \cdot 0,0003$ | В 20,403 |
| 4 $100 \cdot 0,02 + 100 \cdot 0,004 + 10 \cdot 0,00003$    | Г 24,003 |
|  | Д 204,03 |

1.28. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |                                    |         |
|------------------------------------|---------|
| 1 $1,824 : 0,3 - 1,9 \cdot 0,2$    | А 5,048 |
| 2 $0,2432 : 0,04 - 1,9 \cdot 0,02$ | Б 5,98  |
| 3 $36,48 : 6 + 4,5 \cdot 0,2$      | В 5,7   |
| 4 $4,864 : 8 + 0,111 \cdot 40$     | Г 6,042 |
|                                    | Д 6,98  |

1.29. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |   |                   |
|---|-------------------|
| 1 $4 \cdot 1\frac{1}{2} + 1\frac{23}{25} : \frac{3}{20}$          | А $15\frac{1}{3}$ |
| 2 $4 : 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} \cdot 7\frac{1}{7}$            | Б $16\frac{1}{3}$ |
| 3 $8\frac{12}{33} \cdot \left(4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}\right)$ | В $17\frac{1}{3}$ |
| 4 $\left(18\frac{1}{4} + 2\frac{1}{6}\right) : 1\frac{1}{4}$      | Г $18\frac{4}{5}$ |
|   | Д $19\frac{1}{3}$ |

1.30. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1  $-48 : (-26 + 34) + 80$

А  $-72$

2  $-120 : (-26 - 34) + 36 \cdot (-2)$

Б  $-74$

3  $68 : (7 - 41) - 18 \cdot 4$

В  $-70$

4  $-144 : (42 - 46) - 12 \cdot (-3)$

Г  $74$

Д  $72$

1.31. Установити відповідність між степенями (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

А  $\frac{8}{125}$

2  $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

Б  $\frac{8}{27}$

3  $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-3}$

В  $1\frac{1}{8}$

4  $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}$

Г  $3\frac{3}{8}$

Д  $15\frac{5}{8}$

1.32. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1  $5^{-2} \cdot 5^4$

А  $\frac{1}{125}$

2  $(5^{-2})^{-1} \cdot 5^{-3}$

Б  $\frac{1}{25}$

3  $(5^{-1})^{-2} \cdot 5$

В  $\frac{1}{5}$

4  $(5^{-1})^4 \cdot 5^2$

Г  $25$

Д  $125$

Розв'яжіть завдання 1.33–1.47. Відповідь запишіть десятковим дробом.

1.33. Обчислити значення виразу  $\left(8\frac{7}{12} - 2\frac{17}{36}\right) \cdot 2,7 - 4\frac{1}{3} : 0,65$ . У відповідь записати результат, округлений до 0,01.

1.34. Обчислити зручним способом:  $\left(74,7 \cdot \frac{2}{21} + (-105,3) \cdot 2\frac{3}{7} - (-105,3) \cdot \frac{2}{21} - 2\frac{3}{7} \cdot 74,7\right) : 10$ .

1.35. Знайти невідомий член пропорції:  $\frac{1,2 : 0,375 - 0,2}{6\frac{4}{25} : 15\frac{2}{5} + 0,8} = \frac{(0,016 : 0,12 + 0,7) \cdot 3}{x}$ .

1.36. Два пароплави заходять у порт після кожного рейсу. Перший робить рейс за 4 дні, а другий — за 6 днів. Якось у неділю вони зустрілись у порту. Через скільки днів вони зустрінуться в порту в неділю наступного разу?

- 1.37. Для учнів класу приготували однакові подарунки. В усіх подарунках було разом 588 цукерок, 140 яблук і 252 горіхи. Скільки учнів у класі, якщо їх більше, ніж 20?
- 1.38. Середній вік одинадцяти футболістів команди становить 22 роки. Під час гри один із гравців залишив поле, після чого середній вік футболістів, які залишилися, дорівнював 21 рік. Скільки років футболістові, який залишив поле?
- 1.39. Кішка з кошенятами з'їдають куплений господарем корм за 8 днів. Якби кішку годували саму, то їй вистачило б корму на 11 днів. На скільки повних днів вистачило б корму кошенятам?
- 1.40. Швидкість товарного поїзда дорівнює 60 км/год. Чому дорівнює його довжина у метрах, якщо відомо, що він проходить повз нерухомого спостерігача за 15 секунд?
- 1.41. Петрик збирає за 21 хвилину 48 яблук, а Сашко за 84 хвилини — 36 яблук. Скільки яблук збере Петрик за час, за який Сашко збере 54 яблука?
- 1.42. У класі із 40 учнів 30 уміють плавати, 27 — грати у шахи і 5 не вміють ні плавати, ні грати в шахи. Скільки учнів уміють плавати і грати в шахи?
- 1.43. Знайти  $x$ , якщо 
$$3\frac{9}{16} : \left( \frac{2,75}{x : \frac{2}{7} - 45} - \frac{7}{24} \right) + 6,2 : 12\frac{2}{3} = 1,2.$$
- 1.44. У ліцеї навчається 70 учнів, з них 27 записалося в драмгурток, 32 співають у хорі, 22 захоплюються спортом. Драмгурток відвідує 10 учнів, які також займаються в хорі, у хорі співає 6 спортсменів, у драмгуртку займається 8 спортсменів, 3 спортсмени відвідують і драмгурток, і хор. Скільки дітей не співають у хорі, не захоплюються спортом і не займаються в драмгуртку?
- 1.45. Катер пройшов за течією річки 60 км за деякий час. За цей же час проти течії він пройшов би 40 км. Яку відстань у кілометрах за цей час пропливе пліт?
- 1.46. Відстань між містами за течією річки теплохід проходить за 6 год, а проти течії — за 8 год. За скільки годин пропливе цю відстань пліт?
- 1.47. Автомобіль проїхав першу половину шляху зі швидкістю 60 км/год. Шлях, що залишився, половину часу він їхав зі швидкістю 80 км/год, а другу половину часу — зі швидкістю 100 км/год. Знайти у кілометрах за годину середню швидкість руху автомобіля.

## ТЕМА 10. ДРОБОВІ РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

**Рациональним** називають рівняння виду  $f(x) = g(x)$ , де  $f(x)$  та  $g(x)$  — раціональні вирази. Якщо хоча б один із цих виразів дробовий, то рівняння називають **дробовим**.

Наприклад,  $\frac{x+1}{5x-7} = \frac{3}{4-x}$  — дробове раціональне рівняння.

При розв'язанні дробового раціонального рівняння виду  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  потрібно розв'язати алгебраїчне рівняння  $P(x) = 0$  і вилучити ті його корені, за яких  $Q(x) = 0$  (якщо такі є).

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння  $\frac{3x}{x+2} = \frac{1}{x}$ .

$$\blacksquare \frac{3x}{x+2} = \frac{1}{x}; \quad \frac{3x}{x+2} - \frac{1}{x} = 0; \quad \frac{3x^2 - (x+2)}{x(x+2)} = 0; \quad \begin{cases} 3x^2 - (x+2) = 0, \\ x(x+2) \neq 0; \end{cases} \quad 3x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{3}.$$

За значень змінної 1 і  $-\frac{2}{3}$  вираз  $x(x+2)$  не дорівнює нулю.

Відповідь.  $-\frac{2}{3}; 1$ .  $\blacksquare$

**Завдання 10.1–10.21** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**10.1.** Розв'язати рівняння  $\frac{x-5}{x-5} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
R	5	$\emptyset$	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(5; +\infty)$

**10.2.** Розв'язати рівняння  $\frac{x-5}{x-5} = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
5	R	$\emptyset$	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(5; +\infty)$

**10.3.** Розв'язати рівняння  $\frac{x-x}{x-3} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	R	$(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$	$(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$	-3

**10.4.** Розв'язати рівняння  $5x + \frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{x^2-9} + 10$ .

А	Б	В	Г	Д
{2; 3}	$\emptyset$	{-3; 2; 3}	{-3; 3}	{2}

10.5. Розв'язати рівняння  $6x + \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{x^2 - 9} + 18$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	{0}	{-3}	{-3; 3}	{3}

10.6. Розв'язати рівняння  $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	{2}	{-2; 2}	{-2; 0; 2}	{0}

10.7. Розв'язати рівняння  $\frac{(x^2 - 9)(x^2 - 16)}{(x - 3)(x + 4)} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
{-4; -3; 3; 4}	{3; 4}	{-3; -4}	{-3; 4}	{-4; 3}

10.8. Знайти суму коренів рівняння  $\frac{(x - 3)(x - 5)}{x - 2} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
5	-8	-1	8	10

10.9. Розв'язати рівняння  $\frac{3x + 4}{x + 1} = 2$ .

А	Б	В	Г	Д
{-1}	$\left\{-1; -\frac{4}{3}\right\}$	$\left\{-\frac{4}{3}\right\}$	{-2}	{2}

10.10. Вказати інтервал, який містить корені рівняння  $\frac{3}{x} = \frac{2}{x + 1}$ .

А	Б	В	Г	Д
(-5; -3)	(-1; 2)	(2; 4)	(-2; 1)	(-4; -2)

10.11. Розв'язати рівняння  $\frac{1}{x - 7} + \frac{1}{x + 4} = 0$  і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(1; 2)	(-2; -1)	(-4; -2)	(2; 4)	(4; 6)

10.12. Розв'язати рівняння  $\frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 3} + 1 = 0$  і вказати проміжок, якому належить більший його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(0; 1)	(2; 3)	(4; 5)	(3; 4)	(4; 5)

10.13. Знайти суму коренів рівняння  $\frac{x}{3} = \frac{5}{x+2}$ .

А	Б	В	Г	Д
2	-2	15	-15	5

10.14. Встановити значення  $a$ , за яких рівняння  $\frac{x-a}{x^2-8x+15} = 0$  не має коренів.

А	Б	В	Г	Д
$a = 15$	$a = 3$ або $a = 5$	$a = 8$	$a = -3$ або $a = -5$	$a = -8$

10.15. Встановити значення  $a$ , за яких рівняння  $\frac{x-5}{x+9} = \frac{a-x}{x+9}$  не має коренів.

А	Б	В	Г	Д
$a = -23$	$a = -9$	$a = 5$	$a = 23$	$a = 9$

10.16. За якого найменшого значення параметра  $a$  рівняння  $|4x + 3| = 5a + 3$  має розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
1,25	-3	3	-0,6	1

10.17. Катер проходить 160 км за течією річки за той же час, що й 140 км проти течії. Знайти власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо власну швидкість катера позначено через  $x$  км/год?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x+2}{160} = \frac{2x}{140}$	$\frac{x-2}{140} = \frac{x}{160}$	$\frac{160}{x-2} = \frac{140}{x+2}$	$\frac{160}{x+2} = \frac{140}{x}$	$\frac{160}{x+2} = \frac{140}{x-2}$

10.18. Робітник повинен був виготовити за деякий час 90 деталей. Щоденно він виготовляв на 3 деталі більше, ніж планувалося, і тому завдання виконав на 1 день раніше. Скільки деталей щоденно виготовляв робітник?

Кількість деталей, що виготовляє робітник за 1 день, позначено через  $x$ . Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{90}{x-1} - \frac{90}{x} = 3$	$\frac{90}{x-3} - \frac{90}{x} = 1$	$\frac{90}{x} - \frac{90}{x-3} = 1$	$\frac{90}{x} - \frac{90}{x-1} = 3$	$90(x-3) - 90x = 1$

10.19. З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 300 км, одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість першого з них на 10 км/год більша від швидкості другого, а тому він приїхав до місця призначення на 1 год раніше. Знайти швидкість кожного з автомобілів.

Швидкість першого автомобіля позначено через  $x$  км/год. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{300}{x-1} - \frac{300}{x} = 10$	$\frac{300}{x} - \frac{300}{x-1} = 10$	$\frac{300}{x} - \frac{300}{x-10} = 1$	$\frac{300}{x-10} - \frac{300}{x} = 1$	$\frac{x-10}{300} - \frac{x}{300} = 1$

**10.20.** Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяке завдання за 60 год. За скільки годин може виконати всю роботу кожний з робітників, працюючи окремо, якщо перший з них може це зробити на 22 год швидше, ніж другий?

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо час, за який може виконати завдання перший робітник, позначено через  $x$  год?

А	Б	В	Г	Д
$x + (x + 22) = 60$	$x + (x - 22) = 60$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+22} = 60$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+22} = \frac{1}{60}$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-22} = \frac{1}{60}$

**10.21.** На заводі за певний термін повинні були відремонтувати 300 вагонів. Перевиконуючи план ремонту на 3 вагони за тиждень, за два тижні до закінчення терміну відремонтували 299 вагонів. Скільки вагонів ремонтували щотижня?

Кількість вагонів, які ремонтували за тиждень, позначено через  $x$ . Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{300}{x-3} - \frac{299}{x} = 2$	$\frac{300}{x} - \frac{299}{x-3} = 2$	$\frac{300}{x-2} - \frac{299}{x} = 3$	$\frac{300}{x} - \frac{299}{x-2} = 3$	$\frac{299}{x-3} - \frac{300}{x} = 2$

**Завдання 10.22–10.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).**

**10.22.** Установити відповідність між рівняннями (1–4) та рівносильними їм рівняннями або системами (А–Д).

1  $\frac{x}{x-1} = -\frac{2}{x+1}$

2  $x^2 + 3x - 2 = 0$

3  $\sqrt{x}(x+1)(x-2) = 0$

4  $x^2 + 7 = 0$

А  $(x+1)(x-2) = 0$

Б  $x(x-2) = 0$

В  $x^4 + 13 = 0$

Г  $\begin{cases} x(x+1) = -2(x-1); \\ (x-1)(x+1) \neq 0 \end{cases}$

Д  $x(x+1) = -2(x-1)$

**10.23.** Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\frac{x-4}{x-4} = 0$

2  $\frac{x-4}{x-4} = 1$

3  $\frac{x^2-16}{x+4} = 0$

4  $\frac{x^2-16}{x+4} = 1$

А {4}

Б {5}

В  $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$

Г  $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$

Д  $\emptyset$

10.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $2x + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{x-5} + 10$

А {-5; 5}

Б {0}

2  $2x^2 + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{x-5} + 50$

В  $\emptyset$

Г {-5}

3  $2x^2 + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+5} + 50$

Д {5}

4  $2x^2 + \frac{x-5}{x} = \frac{x-5}{x} + 50$

10.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\frac{(x^2-4)(x^2-25)}{(x-2)(x-5)} = 0$

А {-2; 5}

Б {-2; -5}

2  $\frac{(x^2-4)(x^2-25)}{(x+2)(x+5)} = 0$

В {2; 5}

Г {2; -5}

3  $\frac{(x+2)(x-5)}{(x^2-4)(x^2-25)} = 0$

Д  $\emptyset$

4  $\frac{(x^2-4)(x^2-25)}{(x-2)(x+5)} = 0$

10.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\frac{2x-4}{x-2} = 1$

А {1}

Б {-1}

2  $\frac{3x+2}{x+2} = 1$

В {0}

Г {2}

3  $\frac{(2x+3)(x-2)}{x^2-4} = 1$

Д  $\emptyset$

4  $\frac{4x-3}{x-2} = -1$

10.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\frac{4}{x} = \frac{3}{x+1}$

А {-5}

Б {-4}

2  $\frac{2}{x} = \frac{1}{x-2}$

В {4}

Г {5}

3  $\frac{1}{x-3} = \frac{2}{9-x}$

Д {6}

4  $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x-3}$



Розв'яжіть завдання 10.28–10.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

10.28. Розв'язати рівняння  $\frac{2x-2}{x+2} + \frac{x+3}{x-3} - 5 = 0$ . У відповідь записати суму коренів.

10.29. Розв'язати рівняння  $\frac{2x}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{4}{x^2-4}$ .

10.30. Розв'язати рівняння  $\frac{3}{x^2-9} - \frac{1}{x^2-6x+9} = \frac{3}{2x^2+6x}$ .

10.31. Розв'язати рівняння  $\frac{5}{4x^2+4x+4} - \frac{3x}{x^3-1} = \frac{1}{2(x-1)}$ . У відповідь записати найменший корінь.

10.32. Розв'язати рівняння  $\frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$ . У відповідь записати добуток коренів.

10.33. Розв'язати рівняння  $\frac{24}{x^2+2x-8} - \frac{15}{x^2+2x-3} = 2$ . У відповідь записати суму коренів.

10.34. Розв'язати рівняння  $\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^4 - 8\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2 = 9$ . У відповідь записати найбільший корінь.

Розв'язати задачі за допомогою рівнянь (28–30).

10.35. З пункту  $A$  в пункт  $B$ , відстань між якими дорівнює 60 км, спочатку виїхав автобус, а через 20 хв — легковий автомобіль, швидкість якого на 20 км/год вища, ніж швидкість автобуса. Знайти швидкість автобуса у км/год, якщо він приїхав до пункту  $B$  на 10 хв пізніше від легкового автомобіля.

10.36. Бригада робітників повинна була за кілька днів виготовити 272 деталі. Перші десять днів бригада виконувала встановлену норму, а потім почала виготовляти щоденно на 4 деталі більше, ніж за нормою. Тому за один день до терміну було виготовлено 280 деталей. Скільки деталей повинна була виготовляти бригада щоденно за планом?

10.37. Басейн наповнюється водою двома трубами за 6 год. Перша труба може заповнити басейн водою на 5 год швидше, ніж друга. За скільки годин може заповнити весь басейн лише перша труба?

10.38. Розв'язати рівняння  $9\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 14$ . У відповідь записати суму коренів.

10.39. Розв'язати рівняння  $\frac{16}{(x+6)(x-1)} - \frac{20}{(x+2)(x+3)} = 1$ . У відповідь записати найменший корінь.

10.40. Розв'язати рівняння  $\frac{2x}{x^2-4x+2} + \frac{3x}{x^2+x+2} = -\frac{5}{4}$ . У відповідь записати найбільший корінь.

10.41. Розв'язати рівняння  $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{x-4}{x+5} - \frac{x-5}{x+6}$ . У відповідь записати найбільший корінь.

10.42. Знайти всі значення параметра  $a$ , за яких рівняння  $\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x} + a = 0$  має тільки один корінь. У відповідь записати найбільше значення  $a$ .

## ТЕМА 11. ДРОБОВІ РАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Нерівності виду  $\frac{P(x)}{Q(x)} \diamond 0$ , де  $P(x)$ ,  $Q(x)$  — многочлени,  $\diamond$  — один зі знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ ,

називають **дробово-раціональними**. Шляхом виконання відповідних рівносильних перетворень дробово-раціональну нерівність зводять до раціональної:

$$\bullet \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0;$$

$$\bullet \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) < 0;$$

$$\bullet \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0; \end{cases}$$

$$\bullet \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

**Приклад 1.** Розв'язати нерівність  $\frac{5x+7}{x-1} \leq 2$ .

$$\blacksquare \frac{5x+7}{x-1} \leq 2; \quad \frac{5x+7}{x-1} - 2 \leq 0; \quad \frac{5x+7-2(x-1)}{x-1} \leq 0; \quad \frac{3x+9}{x-1} \leq 0 \quad | :3; \quad \frac{x+3}{x-1} \leq 0;$$

$$\begin{cases} (x+3)(x-1) \leq 0, \\ x-1 \neq 0. \end{cases}$$



Отже, розв'язок нерівності —  $x \in [-3; 1)$ .

Відповідь.  $[-3; 1)$ . ■

**Приклад 2.** Визначити кількість цілих розв'язків нерівності  $\frac{6-x}{3x-9} \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
3; 4; 5; 6	Інша відповідь	3	4	4; 5; 6

$$\blacksquare \frac{6-x}{3x-9} \geq 0; \quad \frac{-(x-6)}{3(x-3)} \geq 0 \quad | \cdot (-3); \quad \frac{x-6}{x-3} \leq 0; \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ 0 \quad 3 \quad 6 \end{array}. \text{ Отже, } x \in (3; 6]. \text{ Звер-$$

ніть увагу, що за умовою потрібно не розв'язати нерівність і не знайти цілі розв'язки нерівності, а встановити, скільки цілих розв'язків має нерівність. Оскільки розв'язком нерівності є  $x \in (3; 6]$ , то цілими розв'язками є 4; 5; 6, і їх кількість дорівнює 3. Серед заданих відповідей правильною є не відповідь, позначена літерою Д, а відповідь, позначена літерою В.

Відповідь. **В.** ■

Завдання 11.1–11.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

11.1. Знайти множину розв'язків нерівності  $x + \frac{1}{x} > \frac{1}{x} - 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$R$	$(-2; +\infty)$	$(-2; 0) \cup (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$

11.2. Вибрати нерівність, множиною розв'язків якої є  $R$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{-x^2}{x^2-4} \leq 0$	$\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 \geq 0$	$\frac{x^2-4}{x^2-4} \geq 0$	$\frac{x^2+1}{x^2} \geq 0$	$\frac{-x^2}{x^2+4} \leq 0$

11.3. Вибрати нерівність, множиною розв'язків якої є  $\emptyset$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^2+1}{x^2+1} \leq 1$	$\frac{x^2}{x^2+1} \leq 1$	$\frac{x^2}{x^2+1} \geq 1$	$\frac{x^2-1}{x^2-1} \geq 0$	$\frac{x^2+1}{x^2} \geq 1$

11.4. Розв'язати нерівність  $\frac{x}{x-5} \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0] \cup (5; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup [5; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$	$[0; 5)$	$(0; 5]$

11.5. Розв'язати нерівність  $\frac{x+5}{x-2} \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2) \cup [5; +\infty)$	$(-\infty; -5] \cup (2; +\infty)$	$[-5; 2]$	$[-5; 2)$	$(-2; 5]$

11.6. Розв'язати нерівність  $\frac{(x+5)(x-3)}{x^2+4} < 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-3; 5)$	$(-5; 3)$	$(-\infty; -5) \cup (2; 3)$	$(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$

11.7. Розв'язати нерівність  $\frac{x+5}{x^2-4} \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-5; -2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -5] \cup (-2; 2)$	$(-\infty; -5] \cup [-2; 2]$	$(-\infty; -5)$	$(-\infty; 5]$

11.8. Розв'язати нерівність  $\frac{x+5}{x+3} > 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5) \cup (-3; +\infty)$	$(-5; +\infty)$	$(-3; +\infty)$	$(-\infty; -5)$	$(-\infty; -3)$

11.9. Розв'язати нерівність  $\frac{3x+4}{x+1} \leq 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left[-1\frac{1}{3}; -1\right)$	$[-2; -1]$	$[-2; -1)$	$\left[-1\frac{1}{3}; -1\right]$	$(-\infty; -2] \cup (-1; +\infty)$

11.10. Розв'язати нерівність  $\frac{1}{x} \leq -x$ .

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 0]$

11.11. Розв'язати нерівність  $\frac{3}{x} \leq \frac{2}{x+1}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3] \cup (-1; 0)$	$(-\infty; -3] \cup [-1; 0]$	$[-3; -1)$	$(-1; 0)$	$(-3; -1]$

11.12. Знайти множину розв'язків нерівності  $\frac{3}{x-3} > \frac{1}{x+2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -4,5) \cup (-2; 3)$	$(-4,5; -2) \cup (3; +\infty)$	$(-2; 3)$	$(-3; 2) \cup (4,5; +\infty)$

11.13. Знайти множину розв'язків нерівності  $\frac{4x^2 - 4x + 1}{(x+4)(x-3)} \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$	$(-4; 3)$	$\left(-4; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -4) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$

11.14. Розв'язати нерівність  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8} \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-4; 3)$	$(-4; 2) \cup (2; 3]$	$(-\infty; -4) \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$	$(-3; 4)$

11.15. Обчислити найменший цілий розв'язок нерівності  $\frac{(\sqrt{x})^2 - 2 - x^2}{x+9} \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
-9	-8	0	9	1

11.16. Розв'язати нерівність  $\frac{(x-1)^2(x+7)(x+3)^3}{x^2+6x+9} \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-7; -3) \cup [1; +\infty)$	$(-\infty; -7] \cup (-3; +\infty)$	$[-7; -3)$	$(-\infty; 3) \cup [7; +\infty)$	$(3; 7]$

11.17. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності  $\frac{x(x-3)(3x-2)}{2x-3} \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	Інша відповідь

11.18. Розв'язати нерівність  $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} \leq 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-4; 3)$	$(-4; 3)$	$(-\infty; -4)$	$(-4; +\infty)$	$(-4; 2) \cup (2; +\infty)$

11.19. Знайти множину розв'язків нерівності  $\left| \frac{1}{x-5} \right| > 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$(4; 5) \cup (5; 6)$	$(4; 6)$	$(-\infty; 4) \cup (6; +\infty)$	$(-6; -4)$	$(-\infty; -6) \cup (-4; +\infty)$

11.20. Знайти множину розв'язків нерівності  $\frac{7}{|x|+5} < 1$ .

А	Б	В	Г	Д
R	$(-2; 2)$	$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$	$(-5; 2)$

11.21. Знайти множину розв'язків нерівності  $\frac{(x+2)(x-a)}{x-4} \leq 0$ , якщо  $-2 < a < 3$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-2; a]$	$[a; 4)$	$[-2; a] \cup (4; +\infty)$	$(-\infty; -2] \cup [a; 4)$	$[a; 4]$

11.22. Знайти множину розв'язків нерівності  $\frac{x^2-2x-15}{(x-5)(x-a)} \leq 0$ , якщо  $-3 < a < 5$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-3; a]$	$[-3; a)$	$(-\infty; -3] \cup (5; +\infty)$	$(-\infty; -3] \cup [5; +\infty)$	$(-\infty; -3] \cup (a; 5) \cup (5; +\infty)$

Завдання 11.23–11.29 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

11.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |   |  |   |  |
|---|--|---|--|
| 1 | $x^2 > 3$                              | А | $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$                        |
| 2 | $ x  \leq \sqrt{3}$                    | Б | $(-\infty; -\sqrt{3})$                         |
| 3 | $\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} \leq 0$ | В | $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$                        |
| 4 | $x - \sqrt{3} > 0$                     | Г | $(\sqrt{3}; \infty)$                           |
|   |  | Д | $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$ |

11.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та рівносильними їм нерівностями (А–Д).

- |   |                          |   |  |
|---|--------------------------|---|--|
| 1 | $(x+2)(x-3) < 0$         | А | $\frac{x-3}{x+2} < 0$                                      |
| 2 | $(x+2)(x-3) > 0$         | Б | $\begin{cases} (x+2)(x-3) \geq 0; \\ x \neq 3 \end{cases}$ |
| 3 | $\frac{x+2}{x-3} \geq 0$ | В | $(x+2)(x-3) \leq 0$  |
| 4 | $(x+2)^2 > 0$            | Г | $\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 \geq 0$                    |
|   |                          | Д | $\frac{x+2}{x-3} > 0$                                      |

11.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |   |   |   |                             |
|---|---|---|-----------------------------|
| 1 | $x + \frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{x-2} + 2$  | А | $[2; +\infty)$              |
| 2 | $x + \frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-3} + 2$     | Б | $(-\infty; -2]$             |
| 3 | $x + \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x+1} + 2$  | В | $(-2; 3) \cup (3; +\infty)$ |
| 4 | $-x + \frac{1}{x-3} \leq \frac{1}{x-3} + 2$ | Г | $(2; 3) \cup (3; +\infty)$  |
|   |   | Д | $(2; +\infty)$              |

11.26. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |   |                               |   |                                   |
|---|-------------------------------|---|-----------------------------------|
| 1 | $\frac{x-3}{x+2} \leq 0$      | А | $(-2; 3)$                         |
| 2 | $\frac{x+2}{x-3} \leq 0$      | Б | $[-2; 3]$                         |
| 3 | $\frac{1}{(x+2)(x-3)} \leq 0$ | В | $[-2; 3)$                         |
| 4 | $\frac{(x+2)(x-3)}{5} \leq 0$ | Г | $(-2; 3]$                         |
|   |                               | Д | $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$ |

11.27. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\frac{x+3}{x^2-4} \leq 0$

А  $(-\infty; -3) \cup [-2; 2]$

2  $\frac{x+3}{x^2-4} \geq 0$

Б  $(-\infty; -3] \cup (-2; 2)$

В  $(-\infty; -3] \cup [-2; 2]$

3  $\frac{x^2-4}{x+3} \geq 0$

Г  $[-3; -2) \cup (2; +\infty)$

Д  $(-3; -2] \cup [2; +\infty)$

4  $\frac{x^2-4}{x+3} \leq 0$

11.28. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\frac{x+4}{x+1} > 1$

А  $(-\infty; -4)$

Б  $(-\infty; -1)$

2  $\frac{x+1}{x+4} > 1$

В  $(-\infty; 4)$

Г  $(-4; +\infty)$

3  $\frac{x+1}{x+4} < 1$

Д  $(-1; +\infty)$

4  $\frac{x+4}{x+1} < 1$

11.29. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\frac{1}{x} \leq -x$

А  $(-\infty; -1] \cup (0; 1]$

Б  $(-\infty; 0)$

2  $\frac{1}{x} \geq -x$

В  $[-1; 0) \cup [1; +\infty)$

Г  $(-1; 1)$

3  $\frac{1}{x} \leq x$

Д  $(0; +\infty)$

4  $\frac{1}{x} \geq x$

Розв'яжіть завдання 11.30–11.43. Відповідь запишіть десятковим дробом.

11.30. Розв'язати нерівність  $\frac{x-5}{x+5} < x$ . У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

11.31. Розв'язати нерівність  $\frac{2}{x+9} < \frac{x}{x-6}$ . У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.32. Розв'язати нерівність  $\frac{1}{1-x} \geq 1-2x$ . У відповідь записати суму всіх додатних цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.



- 11.33. Розв'язати нерівність  $\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2x} \leq 1$ . У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.
- 11.34. Розв'язати нерівність  $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \leq \frac{1}{2}$ . У відповідь записати добуток усіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.
- 11.35. Розв'язати нерівність  $2 + \frac{1}{x-3} + \frac{x-3}{x+2} \leq \frac{1}{(x-3)(x+2)}$ . У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.
- 11.36. Розв'язати нерівність  $\frac{2}{3x+7} \leq \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+1}$ . У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.
- 11.37. Розв'язати нерівність  $\frac{x-8}{x^2 - 5x + 4} > \frac{2}{x+1}$ . У відповідь записати найменший додатний цілий розв'язок.
- 11.38. Розв'язати нерівність  $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x+8} \leq 0$ . У відповідь записати добуток усіх розв'язків.
- 11.39. Розв'язати нерівність  $\left| \frac{2x+5}{4x+1} \right| < 1$ . У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.
- 11.40. Розв'язати нерівність  $1 - \frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)(x-1)}$ . У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.
- 11.41. Розв'язати нерівність  $\frac{x^3 - 3x + 2}{6-x} \leq 0$ . У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.
- 11.42. Розв'язати нерівність  $\frac{|x+7|}{x^2 + 8x + 7} < 5$ . У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.
- 11.43. Розв'язати нерівність  $\left| \frac{1}{x+1} \right| < \left| \frac{2}{x-2} \right|$ . У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

## ТЕМА 12. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

**Ірраціональними** називають рівняння, які містять змінну під знаком кореня (радикала)

або в основі степеня з раціональним показником. Наприклад,  $x+3=\sqrt{2x-1}$ ;  $x^{\frac{1}{4}}-10=6$ . Зазвичай при розв'язуванні ірраціональних рівнянь виконують піднесення до степеня. Це перетворення може зумовити появу сторонніх коренів. Тому слід виконувати перевірку, підставляючи отримані корені в задане рівняння, або проводити рівносильні перетворення, враховуючи додаткові умови.

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння:

а)  $\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}-\sqrt{x+10}=0$ ;      б)  $2x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}=3$ .

■ а)  $\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}-\sqrt{x+10}=0$ . Перенесемо один радикал у праву частину рівняння і піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:  $\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}=\sqrt{x+10}$ ;  $(\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23})^2=(\sqrt{x+10})^2$ ;  $5x-20+2\sqrt{(x+3)(4x-23)}=x+10$ ;  $2\sqrt{(x+3)(4x-23)}=30-4x$ ;  $\sqrt{4x^2-11x-69}=15-2x$ .

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:  $4x^2-11x-69=225-60x+4x^2$ ;  $49x=294$ ;  $x=6$ .

Перевірка:  $\sqrt{6+3}+\sqrt{4\cdot 6-23}-\sqrt{6+10}=\sqrt{9}+\sqrt{1}-\sqrt{16}=0$ ;  $0=0$  — правильна рівність; 6 — корінь рівняння.

Відповідь. 6.

б)  $2x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}=3$ . Зробимо заміну:  $x^{\frac{1}{4}}=t$ . Тоді  $x^{\frac{1}{2}}=t^2$ , і задане рівняння матиме вигляд:  $2t^2-5t=3$ ;  $2t^2-5t-3=0$ ;  $t_1=3$ ;  $t_2=-\frac{1}{2}$ . Тому:  $x^{\frac{1}{4}}=3$ ;  $x=3^4$ ;  $x=81$  або  $x^{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}$  — рівняння коренів не має.

Відповідь. 81. ■

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння  $3\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt{4-x}=1$ .

■ Знайдемо ОДЗ, враховуючи, що під коренями парного степеня можуть перебувати невід'ємні вирази:  $\begin{cases} 2x-9 \geq 0; \\ 4-x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 2x \geq 9; \\ -x \geq -4; \end{cases} \begin{cases} x \geq 4,5; \\ x \leq 4; \end{cases} x \in \emptyset$ . Оскільки ОДЗ — порожня множина, то рівняння коренів не має.

Відповідь.  $\emptyset$ . ■

**Приклад 3.** Розв'язати рівняння  $\sqrt{3x+7}=x-7$ .

■  $\sqrt{3x+7}=x-7$ . Якщо  $x-7 < 0$ , то рівняння коренів не має, бо  $\sqrt{3x+7} \geq 0$  для всіх допустимих значень  $x$ . Якщо  $x-7 \geq 0$ ,  $x \geq 7$ , то  $(\sqrt{3x+7})^2=(x-7)^2$ ;  $3x+7=x^2-14x+49$ ;  $x^2-17x+42=0$ ;  $x_1=3$  — не задовольняє умову, що  $x \geq 7$ ,  $x_2=14$ .

Відповідь. 14. ■

**Приклад 4.** За якого найбільшого значення параметра  $a$  рівняння  $(\sqrt{x-2}-3)(x-a)=0$  має єдиний корінь?

■ ОДЗ:  $x-2 \geq 0$ ;  $x \geq 2$ . Добуток  $(\sqrt{x-2}-3)(x-a)$  дорівнює нулю лише тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю. Маємо:  $\begin{cases} \sqrt{x-2}-3=0, \\ x-a=0; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x-2}=3, \\ x=a; \end{cases} \begin{cases} x-2=9, \\ x=a; \end{cases}$

$\begin{cases} x=11, \\ x=a. \end{cases}$  Рівняння має лише один корінь  $x=11$ , якщо  $a < 2$  або якщо  $a=11$ . Отже, найбіль-

шим значенням параметра  $a$ , за якого рівняння має єдиний корінь, є  $a=11$ .

Відповідь. 11. ■

**Приклад 5.** Вказати проміжок, якому належать корені рівняння  $\sqrt{x-5}=7-x$ .

А	Б	В	Г	Д
[0; 5,3]	[5,5; 6,3]	[7; 10]	[5,3; 6,5]	[8; 12]

■ Якщо  $7-x < 0$ , тобто якщо  $x > 7$ , то рівняння коренів не має, бо невід'ємне число, яким є значення арифметичного квадратного кореня  $\sqrt{x-5}$ , не дорівнює від'ємному числу.

Отже, корені можливі лише за умови  $7-x \geq 0$ ;  $x \leq 7$ . Маємо:  $\begin{cases} x \leq 7, \\ \sqrt{x-5}=7-x, \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 7, \\ x-5=49-14x+x^2; \end{cases} \begin{cases} x \leq 7, \\ x^2-15x+54=0; \end{cases} x_1=9$  — не підходить;  $x_2=6$ . Рівняння має один

корінь — число 6. Із запропонованих у відповідях проміжків число 6 належить лише проміжку [5,5; 6,3], тому правильною є відповідь, позначена літерою Б.

Відповідь. Б. ■

**Завдання 12.1–12.23** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**12.1.** Знайти область визначення (область допустимих значень) рівняння  $\sqrt{5-x} + \sqrt{x+1} = 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$R$	$(-\infty; -1]$	$[5; +\infty)$	$(-1; 5)$	$[-1; 5]$

**12.2.** Вказати рівняння, областю визначення якого є одне число.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x-4} + \sqrt{5-x} = 3$	$\sqrt{5-x} + \sqrt{x-7} = 2$	$\sqrt{x+2} - \sqrt{x} = -x$	$\sqrt{2x-6} + \sqrt{9-3x} = x$	$\sqrt{x} + \sqrt{-x-1} = 2$

**12.3.** Вказати рівняння, областю визначення якого є порожня множина.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x+4} + \sqrt{x} = 2$	$\sqrt{4-x} + \sqrt{-x} = 2$	$\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 0$	$\sqrt{x-3} + \sqrt{x-6} = 1$	$\sqrt{x-5} + \sqrt{4-x} = 2$

12.4. Вказати рівняння, коренем якого є число 2.

А	Б	В	Г	Д
$(x-2)\sqrt{x-3}=0$	$(x-2)\sqrt{3-2x}=0$	$(x-2)\sqrt{-x}=0$	$(x-2)\sqrt{x-1}=0$	$(x-2)\sqrt{1-x}=0$

12.5. Знайти суму коренів рівнянь  $\sqrt[3]{x}=2$ ,  $\sqrt[3]{x}=-3$  і  $\sqrt[3]{-x}=1$ .

А	Б	В	Г	Д
-20	-18	0	12	9

12.6. Знайти суму коренів рівнянь  $\sqrt{x-1}=2$  і  $\sqrt{-x}=5$ .

А	Б	В	Г	Д
30	-20	8	-7	-24

12.7. Яке з наведених рівнянь має корені?

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x+7}=-1$	$\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}=2$	$\sqrt{x+5}+\sqrt{2-x}=0$	$\sqrt{2x-6}+\sqrt{x-3}=0$	$\sqrt{x}+\sqrt{3-x}=-2$

12.8. Знайти значення виразу  $\sqrt{2x-9}$ , якщо значення  $x$  задовольняє умову  $\sqrt{2x-9}=\sqrt{6-x}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	5 або -1	1 або -1	5	1

12.9. Знайти значення виразу  $\sqrt{x+11}$ , якщо значення  $x$  задовольняє умову  $\sqrt{x+11}=1-x$ .

А	Б	В	Г	Д
3 або 4	3 або -3	3	4 або -4	4

12.10. Знайти суму коренів рівняння  $\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+2=0$ .

А	Б	В	Г	Д
9	-9	3	-3	2

12.11. Розв'язати рівняння  $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}=6$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	$-4\frac{3}{8}; 7$	7	-7	63

12.12. Скільки коренів має рівняння  $3\sqrt{x-1}+7\sqrt{1-x}=3x^3+7x^5$ ?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	більше, ніж три

12.13. Скільки цілих коренів має рівняння  $\sqrt[3]{3x-6}+\sqrt[3]{x+6}=2-\sqrt{2-x}$ ?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

12.14. Скільки цілих коренів має рівняння  $\sqrt{2008-x}+\sqrt{x-2007}=1$ ?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

12.15. Скільки ірраціональних коренів має рівняння  $\sqrt{2x-3} = 3-2x$ ?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

12.16. Скільки коренів має рівняння  $(x^2 - 5)(x + \sqrt{-x}) = 0$ ?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

12.17. Розв'язати рівняння  $(3x+12)\sqrt{x-2} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
-4	-4; 2	2	-2; 4	-2

12.18. Знайти суму коренів рівняння  $(x^2 + 5x - 6)\sqrt{x+1,5} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
-6,5	3,5	-5	-2,5	-0,5

12.19. Скільки коренів має рівняння  $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 6} = 6x - 6$ ?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

12.20. Розв'язати рівняння  $\sqrt{x-a} = a$ .

А	Б	В	Г	Д
За будь-якого $a$ $x = 2a$	за будь-якого $a$ $x = a^2 + a$	якщо $a \leq 0, x \in \emptyset$ , якщо $a > 0$ , $x = a^2 + a$	якщо $a < 0, x \notin \emptyset$ , якщо $a \geq 0$ , $x = a^2 + a$	якщо $a < 0, x \notin \emptyset$ , якщо $a \geq 0, x = 2a$

12.21. Розв'язати рівняння  $\sqrt{x+4} = a-2$ .

А	Б	В	Г	Д
За будь-якого $a$ $x = a^2 - 2a$	якщо $a < 2, x \in \emptyset$ , якщо $a \geq 0$ , $x = a - 2$	якщо $a \leq 2, x \in \emptyset$ , якщо $a > 0$ , $x = a - 2$	якщо $a \leq 2, x \in \emptyset$ , якщо $a > 0$ , $x = a^2 - 2a$	якщо $a < 2, x \in \emptyset$ , якщо $a \geq 0$ , $x = a^2 - 4a$

12.22. Знайти всі значення  $a$ , за яких рівняння  $\sqrt{(x-a)(x+1)} = 0$  та  $(x-a)\sqrt{x+1} = 0$  рівносильні.

А	Б	В	Г	Д
$a \leq -1$	$a = -1$	$a > -1$	$a \geq -1$	$a < -1$

12.23. Знайти всі значення  $a$ , за яких рівняння  $\sqrt{(x-a)(x+1)} = 0$  та  $(x+1)\sqrt{x-a} = 0$  рівносильні.

А	Б	В	Г	Д
$a \leq -1$	$a = -1$	$a > -1$	$a \geq -1$	$a < -1$

Завдання 12.24–12.30 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

12.24. Установити відповідність між заданими рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |                                |               |
|--------------------------------|---------------|
| 1 $\sqrt{x-2} = -2$            | А {2}         |
| 2 $(x+2)\sqrt{x-6} = 0$        | Б {6}         |
| 3 $\sqrt{\frac{x-2}{x-6}} = 0$ | В $\emptyset$ |
| 4 $\sqrt{x+6} = 2$             | Г {-2; 6}     |
|                                | Д {-2}        |

12.25. Установити відповідність між заданими рівняннями (1–4) та рівносильними їм рівняннями або системами (А–Д).

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| 1 $\sqrt{x-2} = \sqrt{-5-x+x^2}$ | А $x^2 - 6x + 9 = 0$  |
| 2 $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{3}$   | Б $\sqrt{x+1} \cdot (x-3) = 1$                                  |
| 3 $(x+1) \cdot \sqrt{x-3} = 0$   | В $x^2 - 2x - 3 = 0$  |
| 4 $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$      | Г $ x-3  = 1$   |
|                                  | Д $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0; \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$ |

12.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та областями їх визначення (А–Д).

- |                                 |                   |
|---------------------------------|-------------------|
| 1 $\sqrt{x-4} + \sqrt{4-x} = 0$ | А $\emptyset$     |
| 2 $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+4} = 4$ | Б $(-\infty; -4]$ |
| 3 $\sqrt{4-x} + \sqrt{x+4} = 4$ | В $[-4; 4]$       |
| 4 $\sqrt{x-4} + \sqrt{-x} = 4$  | Г $[4; +\infty)$  |
|                                 | Д {4}             |

12.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

- |                     |               |
|---------------------|---------------|
| 1 $\sqrt{-x} = 4$   | А $\emptyset$ |
| 2 $\sqrt{x} = -4$   | Б {-4; 4}     |
| 3 $\sqrt{x^2} = 16$ | В {16}        |
| 4 $\sqrt{x-4} = 0$  | Г {-16}       |
|                     | Д {-16; 16}   |

12.28. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

- |                        |               |
|------------------------|---------------|
| 1 $\sqrt[3]{-2x} = 4$  | А $\emptyset$ |
| 2 $\sqrt[4]{-4x} = 4$  | Б {-64}       |
| 3 $\sqrt[4]{-4x} = -4$ | В {-32}       |
| 4 $\sqrt[3]{-2x} = -2$ | Г {32}        |
|                        | Д {16}        |

12.29. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів (А–Д).

1  $x^2 - 10x\sqrt{x} + 9x = 0$

А Один

2  $x + 10\sqrt{x} + 9 = 0$

Б Два

3  $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$

В Три

4  $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

Г Чотири

Д Жодного

12.30. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1  $(x-2)\sqrt{x+1} = 0$

А -1; 2

2  $(x+1)\sqrt{x-2} = 0$

Б 2

3  $(x-1)\sqrt{x-2} = 0$

В 2

4  $(x+2)\sqrt{x-1} = 0$

Г -1; 1

Д 1

Розв'яжіть завдання 12.31–12.47. Відповідь запишіть десятковим дробом.

12.31. Розв'язати рівняння  $\sqrt{x^2 - 5x + 1} = \sqrt{x - 4}$ .

12.32. Розв'язати рівняння  $\sqrt{3-x}\sqrt{2-x} = \sqrt{2}$ .

12.33. Розв'язати рівняння  $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$ .

12.34. Розв'язати рівняння  $(x-1)\sqrt{x^2-x-42} = 0$ . У відповідь записати модуль різниці коренів.

12.35. Розв'язати рівняння  $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$ .

12.36. Розв'язати рівняння  $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-1} = \sqrt{x+1}$ .

12.37. Розв'язати рівняння  $\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[3]{\frac{x+3}{5-x}} = 2$ .

12.38. Розв'язати рівняння  $\sqrt{x^2-3x+5} = -x^2+3x+7$ . У відповідь записати модуль різниці коренів.

12.39. Знайти суму коренів рівняння  $(x+1)(x-4) = \sqrt{x^2-3x+7} + 9$ .

12.40. Розв'язати рівняння  $\frac{x\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} - \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x+1}} = 4$ .

12.41. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{y-9} = 2; \\ \sqrt{y+7} - \sqrt{x-9} = 2. \end{cases}$  У відповідь записати найбільше зі значень  $x_0$  або  $y_0$ , де пара  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

12.42. Розв'язати рівняння  $\sqrt{x^2-3x-88} + \sqrt{176+6x-2x^2} \arccos(x-10) = 0$ .

12.43. Розв'язати рівняння  $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3$ . У відповідь записати суму коренів.

12.44. Розв'язати рівняння  $\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3} = 0$ .

12.45. Розв'язати рівняння  $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2+5x-6} = 51-2x$ .

**12.46.** Розв'язати рівняння  $\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}} - \sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} = 4$ . У відповідь записати найменший корінь.

**12.47.** Розв'язати рівняння  $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a$ . У відповідь записати найбільше значення  $a$ , за якого рівняння має корені.



### ТЕМА 13. ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Нерівність, яка містить змінну під знаком радикала або в основі степеня з раціональним показником, називають *ірраціональною*. Наприклад,  $\sqrt{x-2} > 3-7x$ ,  $\sqrt[3]{x} + \sqrt{2x+1} \leq 1$ ,  $x^{\frac{1}{3}} - x > 3$  — ірраціональні нерівності. Основним методом розв'язування ірраціональних нерівностей є піднесення до степеня.

- Унаслідок піднесення обох частин нерівності до непарного степеня, отримують рівносильну нерівність.
- Якщо обидві частини нерівності невід'ємні, то унаслідок їх піднесення до парного степеня отримують рівносильну нерівність.

Розв'язуючи ірраціональні нерівності, можна застосувати такі рівносильні перетворення:

$$\bullet \quad \sqrt[n]{f(x)} \diamond g(x) \Leftrightarrow f(x) \diamond (g(x))^{2n+1} \quad (\diamond — \text{один з знаків } >, <, \geq, \leq);$$

$$\bullet \quad \sqrt[n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0; \\ g(x) > 0; \\ f(x) < (g(x))^{2n}; \end{cases}$$

$$\bullet \quad \sqrt[n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0; \\ g(x) < 0; \\ g(x) \geq 0; \\ f(x) > (g(x))^{2n}; \end{cases}$$

зокрема, нерівність  $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$  рівноси-

льна системі  $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

**Приклад 1.** Розв'язати нерівність:

а)  $\sqrt{x^2 - 3x} < 5 - x$ ;

б)  $\sqrt[3]{x^3 - 2x} > x + 2$ .

■ а) Нерівність  $\sqrt{x^2 - 3x} < 5 - x$  рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - 3x \geq 0; \\ 5 - x > 0; \\ x^2 - 3x < (5 - x)^2; \end{cases} \begin{cases} x(x-3) \geq 0; \\ x < 5; \\ x^2 - 3x < 25 - 10x + x^2; \end{cases} \begin{cases} x(x-3) \geq 0; \\ x < 5; \\ 7x < 25; \end{cases} \begin{cases} x \leq 0; \\ x \geq 3; \\ x < 5; \\ x < \frac{25}{7}; \end{cases} \quad x \in (-\infty; 0] \cup \left[3; 3\frac{4}{7}\right).$$

Відповідь.  $(-\infty; 0] \cup \left[3; 3\frac{4}{7}\right)$ .

б) Піднесемо обидві частини нерівності  $\sqrt[3]{x^3 - 2x} > x + 2$  до кубу:  $x^3 - 2x > x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ ;  
 $6x^2 + 14x + 8 < 0$ ;  $3x^2 + 7x + 4 < 0$ ;  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -\frac{4}{3}$ ;  $x \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right)$ .

Відповідь.  $\left(-\frac{4}{3}; -1\right)$ . ■

**Приклад 2.** Розв'язати нерівність  $\sqrt{2x+3} \geq -4$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-3,5; +\infty)$	$(6,5; +\infty)$	$(1,5; +\infty)$	$[6,5; +\infty)$	$[-1,5; +\infty)$

■  $\sqrt{2x+3} \geq -4$ . Розв'язки нерівності — усі допустимі значення  $x$ . Отже,  $2x+3 \geq 0$ ;  $2x \geq -3$ ;  $x \geq -1,5$ .

Відповідь. Д. ■

**Завдання 13.1–13.20** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**13.1.** Знайти множину розв'язків нерівності  $\sqrt{x} > -3$ .

А	Б	В	Г	Д
$R$	$\emptyset$	$(9; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$

**13.2.** Розв'язати нерівність  $\sqrt{x} \geq 5$ .

А	Б	В	Г	Д
$[0; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$[25; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(25; +\infty)$

**13.3.** Розв'язати нерівність  $\sqrt{x} \leq 4$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 16]$	$(0; 2]$	$[0; 2]$	$(0; 16]$	$[0; 16]$

**13.4.** Знайти множину розв'язків нерівності  $\sqrt{x} < -2$ .

А	Б	В	Г	Д
$R$	$\emptyset$	$(-\infty; -2)$	$(-\infty; -4)$	$[0; 4)$

**13.5.** Розв'язати нерівність  $\sqrt[3]{x} < 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$[0; 2)$	$[0; 8)$	$(-\infty; 16)$	$[0; 16)$	$(0; 16)$

**13.6.** Розв'язати нерівність  $\sqrt[3]{x} > -2$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-8; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(8; +\infty)$	$(-8; 0)$	$(-8; 0]$

**13.7.** Знайти множину розв'язків нерівності  $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1}$ .

А	Б	В	Г	Д
$R$	$[3; +\infty)$	$[1; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$[3; +\infty)$

**13.8.** Розв'язати нерівність  $\sqrt{x} \leq x$ .

А	Б	В	Г	Д
$[1; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[0; 1]$	$\{0\} \cup (1; +\infty)$	$\{0\} \cup [1; +\infty)$

13.9. Скільки цілих розв'язків має нерівність  $\sqrt{2x} \geq x$ ?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	більше, ніж три

13.10. Розв'язати нерівність  $(x+4)\sqrt{-x} > 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	$(-4; 0)$	$(-4; 0]$	$(-4; +\infty)$	$\{0\} \cup (4; +\infty)$

13.11. Скільки цілих розв'язків має нерівність  $(5-x)\sqrt{x} > 0$ ?

А	Б	В	Г	Д
Три	чотири	п'ять	шість	більше, ніж шість

13.12. Розв'язати нерівність  $(x-6)\sqrt{x} \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(6; +\infty)$	$[6; +\infty)$	$\{0\} \cup [6; +\infty)$

13.13. Розв'язати нерівність  $(x+1)\sqrt{x+3} \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	$[-3; +\infty)$	$[-1; +\infty)$	$[-3; -1]$	$[1; 3]$

13.14. Розв'язати нерівність  $\sqrt{x^2-9} < x$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$	$(3; +\infty)$	$[3; +\infty)$	$(-\infty; -3]$	$\emptyset$

13.15. Знайти множину розв'язків нерівності  $\sqrt{x^2-1} > x$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	$[-1; 1]$	$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -1]$

13.16. Знайти множину розв'язків нерівності  $\sqrt{3x+7} < x+1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left[-\frac{7}{3}; +\infty\right)$	$(-1; 0)$	$(3; +\infty)$	$[3; +\infty)$	$(-1; 3)$

13.17. Серед наведених нерівностей вказати ту, множина розв'язків якої містить множину натуральних чисел.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x} > 1$	$\sqrt{x} > -1$	$\sqrt{x} < -1$	$\sqrt{x} < 1$	$\sqrt{-x} > -1$

13.18. Серед наведених нерівностей вказати ту, множиною розв'язків якої є відрізок  $[-2; 0]$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{-x} \geq \sqrt{2}$	$\sqrt{x} \geq \sqrt{2}$	$\sqrt{x} \leq \sqrt{2}$	$\sqrt{-x} \leq \sqrt{2}$	$\sqrt{-x} \leq -\sqrt{2}$

13.19. Розв'язати нерівність  $\sqrt[3]{x-3}\sqrt{x-2}\sqrt[4]{5-x} \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$[3; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$(-\infty; 3]$	$[2; 3]$	$[2; 3] \cup \{5\}$

13.20. Знайти суму цілих розв'язків нерівності  $\sqrt[3]{x-3}\sqrt{x-3}\sqrt[4]{5-x} \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
14	12	9	7	6

Завдання 13.21–13.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

13.21. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\sqrt{x^2+1} > -2$

А  $(-\infty; +\infty)$

2  $\sqrt{x+1} < -2$

Б  $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

3  $\frac{1}{\sqrt{3-x}} > 0$

В  $(-\infty; 3)$

4  $\sqrt{x} > \sqrt{2x-3}$

Г  $\emptyset$

Д  $(1,5; 3)$

13.22. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–4) та рівносильними їм нерівностями або системами (А–Д).

1  $\sqrt{x^2+7} > x$

А  $x^2+2x > 9$

2  $\sqrt{x-2} < \sqrt{1-x}$

Б  $\cos x < -\sqrt{3}$

3  $\sqrt{x^2+2x} > -3$

В  $\begin{cases} 2x < 3; \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$

4  $\sqrt{2-x} > \sqrt{x-1}$

Г  $\sin x > -\frac{\pi}{2}$

Д  $x^2+2x \geq 0$

13.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\sqrt{x} \geq -4$

А  $[-4; +\infty)$

2  $\sqrt{x+4} \geq 0$

Б  $[-2; +\infty)$

3  $\sqrt{x} \geq 2$

В  $[0; +\infty)$

4  $\sqrt{x-2} \geq 0$

Г  $[2; +\infty)$

Д  $[4; +\infty)$

13.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\sqrt{x} \leq 2$

А  $[-2; 0]$

2  $\sqrt{x} \leq -2$

Б  $[-2; 2]$

3  $\sqrt{x-2} \leq 2$

В  $[0; 4]$

4  $\sqrt{x+2} \leq 2$

Г  $[2; 6]$

Д  $\emptyset$

**13.25.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |                              |                   |
|------------------------------|-------------------|
| 1 $\sqrt{-x} \geq -\sqrt{3}$ | А $(-\infty; -3]$ |
| 2 $\sqrt{-x} \leq -\sqrt{3}$ | Б $(-\infty; 0]$  |
| 3 $\sqrt{-x} \geq \sqrt{3}$  | В $[-3; 0]$       |
| 4 $\sqrt{-x} \leq \sqrt{3}$  | Г $[0; +\infty)$  |
|                              | Д $\emptyset$     |

**13.26.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |                            |                   |
|----------------------------|-------------------|
| 1 $\sqrt{x+2} > \sqrt{x}$  | А $\emptyset$     |
| 2 $\sqrt{x} > \sqrt{x-2}$  | Б $[-2; +\infty)$ |
| 3 $\sqrt{x+2} > \sqrt{-x}$ | В $[-1; 0]$       |
| 4 $\sqrt{-x} > \sqrt{x-2}$ | Г $[0; +\infty)$  |
|                            | Д $[2; +\infty)$  |

**13.27.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |                      |                  |
|----------------------|------------------|
| 1 $\sqrt{x} \geq x$  | А $\emptyset$    |
| 2 $\sqrt{x} \leq x$  | Б $(-\infty; 0]$ |
| 3 $\sqrt{-x} \geq x$ | В $[0; 1]$       |
| 4 $\sqrt{-x} \leq x$ | Г $[1; +\infty)$ |
|                      | Д $\{0\}$        |

**Розв'яжіть завдання 13.28–13.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

**13.28.** Розв'язати нерівність  $\sqrt{x^2 - 7x + 5} \geq \sqrt{3x - 4}$ . У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

**13.29.** Розв'язати нерівність  $\sqrt{\frac{2x-3}{4x-1}} \geq \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ . У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

**13.30.** Розв'язати нерівність  $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 3+2x$ . У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

**13.31.** Розв'язати нерівність  $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$ . У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

**13.32.** Розв'язати нерівність  $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$ . У відповідь записати суму всіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

**13.33.** Розв'язати нерівність  $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$ . У відповідь записати найбільше ціле від'ємне число, яке не є розв'язком нерівності.

**13.34.** Розв'язати нерівність  $\sqrt{x-6} - \sqrt{x+10} \leq 1$ . У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

- 13.35. Розв'язати нерівність  $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+15} \leq 5$ . У відповідь записати суму найбільшого та найменшого розв'язків нерівності.
- 13.36. Розв'язати нерівність  $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$ . У відповідь записати суму всіх цілих розв'язків нерівності.
- 13.37. Розв'язати нерівність  $\sqrt{(3x-2)^2} > x+6$ . У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.
- 13.38. Розв'язати нерівність  $|\sqrt{x-2}-3| \geq |\sqrt{7-x}-2|+1$ . У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.
- 13.39. Розв'язати нерівність  $\sqrt{25-x^2} \leq \frac{12}{x}$ . У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.
- 13.40. Розв'язати нерівність  $\frac{11-\sqrt{25-x^2}}{x} \leq 2$ . У відповідь записати модуль добутку усіх цілих розв'язків нерівності.

## ТЕМА 14. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Рівняння, яке містить змінну в показнику степеня, називають *показниковим* рівнянням.

Рівняння виду  $a^x = b$ , де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , називають найпростішим показниковим рівнянням. Наприклад,  $5^x = 125$ ;  $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 1,5$  тощо. Якщо  $b > 0$ , то розв'язком рівняння  $a^x = b$  є  $x = \log_a b$ ; якщо  $b \leq 0$ , то рівняння  $a^x = b$  коренів не має.

Показникові рівняння найчастіше розв'язують логарифмуванням, у результаті якого отримують рівносильні рівняння:

- рівняння виду  $a^{f(x)} = b$ , де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$  розв'язують, логарифмуючи обидві його частини за основою  $a$ . Отримують рівносильне рівняння  $f(x) = \log_a b$ ;
- рівняння виду  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ , де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  рівносильне рівнянню  $f(x) = g(x)$ ;
- рівняння виду  $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ , де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$  рівносильне рівнянню  $f(x) = g(x) \log_a b$ .

Розв'язуючи складніші показникові рівняння, як правило використовують один із трьох підходів:

- зводять степені до однакових основ, подаючи рівняння у вигляді  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ;
- вводять нову змінну (проводять заміну змінних);
- зводять рівняння до вигляду  $f(x) = g(x)$ , де одна із функцій ( $f(x)$  чи  $g(x)$ ) зростаюча, а інша — спадна. Таке рівняння має не більше одного кореня.

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння:

а)  $3^x = 1$ ;                      б)  $0,2^{3x-1} = \sqrt{125}$ ;                      в)  $4^{x-1} - 1,5 \cdot 2^{x+2} + 20 = 0$ ;

г)  $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$ ;      д)  $7^{x+1} = 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$ .

■ а)  $3^x = 1$ . Оскільки  $1 = 3^0$ , то  $3^x = 3^0$ ;  $x = 0$ .

Відповідь. 0.

б)  $0,2^{3x-1} = \sqrt{125}$ . Оскільки  $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1}$  і  $125 = 5^3$ , то  $(5^{-1})^{3x-1} = (5^3)^{\frac{1}{2}}$ ;  $5^{-3x+1} = 5^{\frac{3}{2}}$ ;  
 $-3x+1 = \frac{3}{2}$ ;  $x = -\frac{1}{6}$ .

Відповідь.  $-\frac{1}{6}$ .

в)  $4^{x-1} - 1,5 \cdot 2^{x+2} + 20 = 0$ . Залишимо у показниках степенів лише змінну:

$$\frac{4^x}{4^1} - 1,5 \cdot 2^x \cdot 2^2 + 20 = 0; \quad \frac{4^x}{4} - 6 \cdot 2^x + 20 = 0 \quad | \times 4; \quad 4^x - 24 \cdot 2^x + 80 = 0. \text{ Зробимо заміну: } 2^x = t,$$

тоді  $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = t^2$ . Одержимо:  $t^2 - 24t + 80 = 0$ ;  $t_1 = 20$ ,  $t_2 = 4$ . Повертаємось до змінної  $x$ :  $2^x = 20$ ;  $x = \log_2 20$ , або  $2^x = 4$ ;  $x = 2$ .

Відповідь. 2;  $\log_2 20$ .

г)  $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$ ;  $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$ . Поділимо обидві частини рівняння на вираз  $3^{2x} \neq 0$  й одержимо:  $3 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - 5 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + 2 \cdot \frac{3^{2x}}{3^{2x}} = 0$ ;  $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 = 0$ . Зробимо

заміну:  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = a$ . Тоді  $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = a^2$ . Отримаємо:  $3a^2 - 5a + 2 = 0$ ;  $a_1 = 1, a_2 = \frac{2}{3}$ . Повертаємося

до попередньої змінної:  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ ;  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0$ ;  $x = 0$  або  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$ ;  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^1$ ;  $x = 1$ .

Відповідь. 0; 1.

д)  $7^{x+1} = 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$ . Очевидно, що  $x = 0$  — корінь рівняння  $\left(7^1 = 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1\right)$ ;  $7 = 7$ .

Функція  $y = 7^{x+1}$  зростаюча, а функція  $y = 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$  спадає. Тому дане рівняння має не більше одного кореня. Отже, інших коренів, крім  $x = 0$ , немає.

Відповідь. 0. ■

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння  $5^{\frac{x+4}{x}} - 124 \cdot 5^{\frac{2}{x}} - 25 = 0$ .

■ Зведемо степені лівої частини до одного показника:  $5^{\frac{x+4}{x}} - 124 \cdot 5^{\frac{2}{x}} - 25 = 0$ ;  
 $5^{1+\frac{4}{x}} - 124 \cdot 5^{\frac{2}{x}} - 25 = 0$ ;  $5 \cdot 5^{\frac{2}{x}} - 124 \cdot 5^{\frac{2}{x}} - 25 = 0$ ;  $5 \cdot \left(5^{\frac{2}{x}}\right)^2 - 124 \cdot 5^{\frac{2}{x}} - 25 = 0$ ;  $5^{\frac{2}{x}} = -\frac{1}{5}$  — коренів немає.  $5^{\frac{2}{x}} = 25$ ;  $5^{\frac{2}{x}} = 5^2$ ;  $\frac{2}{x} = 2$ ;  $x = 1$ .

Відповідь. 1. ■

**Приклад 3.** Знайти суму коренів рівняння  $(3^{2x^2-29} - 27)\sqrt[4]{5x+18} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
0,4	-3,6	4	Інша відповідь	-7,6

■ Спочатку розв'яжемо рівняння  $(3^{2x^2-29} - 27)\sqrt[4]{5x+18} = 0$ , а потім знайдемо суму його коренів. ОДЗ рівняння:  $5x+18 \geq 0$ ;  $x \geq -3,6$ . Добуток  $(3^{2x^2-29} - 27)\sqrt[4]{5x+18}$  дорівнює нулю лише тоді, коли один із множників дорівнює нулю. Маємо: 1.  $3^{2x^2-29} - 27 = 0$ ;  $3^{2x^2-29} = 3^3$ ;  $2x^2 - 29 = 3$ ;  $2x^2 = 32$ ;  $x^2 = 16$ ;  $x_1 = -4, x_2 = 4$ . Урахувавши ОДЗ, маємо:  $x = 4$ . 2.  $\sqrt[4]{5x+18} = 0$ ;  $5x+18 = 0$ ;  $x = -3,6$ . Отже, коренями рівняння є числа -3,6 і 4, а їх сума дорівнює  $-3,6 + 4 = 0,4$ .

Відповідь. А. ■



Завдання 14.1–14.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

14.1. Розв'язати рівняння  $5^x = 8$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[3]{5}$	$\log_5 8$	$\log_8 5$	$\pm\sqrt[3]{5}$

14.2. Розв'язати рівняння  $5^{x-9} = 5$  і  $3^x - 3 = 0$  та вказати суму їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
0	1	8	9	11

14.3. Розв'язати рівняння  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 4^{2x}$  і  $4^{3x+1} = 8^{-2x-1}$  та вказати інтервал, який містить їх корені.

А	Б	В	Г	Д
$(-3; -2)$	$(-2; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$

14.4. Розв'язати рівняння  $3^{x-5} = 9^{-2x}$ .

А	Б	В	Г	Д
$1\frac{2}{3}$	1	1,25	0	-1

14.5. Розв'язати рівняння  $5^{\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}} = 1$  і  $\left(\frac{2}{3}\right)^{(x^2-4)(x-1)} = 1$  та вказати їх спільні корені.

А	Б	В	Г	Д
$-2; 2$ і $1$	$2$ і $1$	$-2$ і $1$	$-2$ і $2$	$2$

14.6. Якому з проміжків належить корінь рівняння  $0,008^x = 5^{1-2x}$ ?

А	Б	В	Г	Д
$[0; 2]$	$(-1; 5]$	$(2; +\infty)$	$(0; 1)$	$(-3; 0]$

14.7. Серед наведених рівнянь вказати рівняння, рівносильне рівнянню  $8^x = 16^{-1}\sqrt{32^x}$ .

А	Б	В	Г	Д
$3x = x - 1$	$3x = \frac{x}{2} - 1$	$3x = \frac{5x}{2} - 4$	$3x = \frac{5x}{2} - 4$	$3x = \frac{6x}{2} - 4$

14.8. Яке з наведених рівнянь має корені?

А	Б	В	Г	Д
$7^{x^2} = \frac{1}{2}$	$7^x = \frac{1}{2}$	$7^{ x } = \frac{1}{2}$	$7^x = 0$	$7^x = -\frac{1}{2}$

14.9. Розв'язати рівняння  $6^{x+1} = 3^{x+1}$  і  $2^{x-5} = 8^{x-5}$  та знайти суму їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
4	-4	5	-5	53

14.10. Розв'язати рівняння  $4^{x+2} - 4^{x+1} + 4^x = 39$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[4]{3}$	$\sqrt[3]{4}$	$\log_3 4$	$\log_4 3$	$\emptyset$

14.11. Знайти суму коренів рівняння  $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
1	0	-6	6	-5

14.12. Встановити кількість коренів рівняння  $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

14.13. Розв'язати рівняння  $7^x = 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pm\sqrt{\log_2 7}$	$\sqrt{\log_2 7}$	$\pm\sqrt{\log_7 2}$	$\sqrt{\log_7 2}$	$\pm\sqrt{7}$

14.14. Розв'язати рівняння  $2^x \cdot 3^{x-1} = 72$  і  $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{7^x} = 196$  та вказати суму їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
8	7	6	5	4

14.15. Розв'язати рівняння  $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$  і  $5^{2x} \cdot 6^{2x} = 900$  та вказати суму їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
8	7	6	5	4

14.16. Знайти значення виразу  $7^x$ , якщо  $7^x - \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 6$ .

А	Б	В	Г	Д
1	2	6	7	14

14.17. Знайти значення виразу  $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ , якщо  $3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} = 5 \cdot 6^x$ .

А	Б	В	Г	Д
4	3 або 4	$\frac{2}{3}$ або 1	0 або 1	$\frac{4}{9}$ або 1

14.18. Знайти значення виразу  $2^x$ , якщо  $2^{2x} - 2^{x-1} = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
2	2 або -4	1	4	2 або 4

14.19. Знайти значення виразу  $9^{\frac{1}{x}}$ , якщо  $81^{\frac{1}{x}} - 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}} = 45$ .

А	Б	В	Г	Д
4 або 9	-4 або 9	9	81	16 або 25

14.20. Указати проміжок, якому належить корінь рівняння  $9^x + 2 \cdot 3^{\frac{x+3}{x}} - 27 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-4; -2]$	$[-2; 0]$	$[0; 2]$	$[2; 4]$	$[4; 6]$

14.21. Розв'язати рівняння  $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	0	$2\pi k, k \in Z$	$\pi k, k \in Z$	$\frac{\pi k}{2}, k \in Z$

14.22. За якого значення параметра  $a$  рівняння  $16^x - (a+1) \cdot 4^x + a = 0$  має один корінь?

А	Б	В	Г	Д
-2	-1	0	1	2

14.23. Знайти суму коренів рівняння  $(x^2 + x + 1)^{x-3} = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
3	0; -1	-1; 0; 3	2	-2

Завдання 14.24–14.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

14.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

- 1  $5^x = 7$
- 2  $x^5 = 7$
- 3  $7^x = 5$
- 4  $x^7 = 5$

- А  $5^7$
- Б  $\sqrt[3]{5}$
- В  $\sqrt[3]{7}$
- Г  $\log_7 5$
- Д  $\log_5 7$

14.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів (А–Д).

1  $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} = 2^{1-x}$

2  $2^{|x-1|} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

3  $2^{-x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3}$

4  $2^{|x-1|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

- А Жодного
- Б Один
- В Два
- Г Три
- Д Безліч

14.26. Установити відповідність між парами рівнянь (1–4) та сумою їх коренів (А–Д).

- |   |   |      |
|---|---|------|
| 1 | $6^{-2x} = 36$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = \frac{1}{8}$              | А -2 |
| 2 | $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 4$ і $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 49$  | Б 2  |
| 3 | $3^x = 243$ і $\left(\frac{8}{125}\right)^{x+4} = \left(\frac{5}{2}\right)^9$ | В -1 |
| 4 | $5^{2x} \cdot 6^{2x} = 900$ і $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{7^x} = 196$             | Г 5  |
|   |   | Д 0  |

14.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та значеннями (А–Д) виразу  $2^{x_0-1}$ , де  $x_0$  — корінь рівняння.

- |   |   |      |
|---|---|------|
| 1 | $2^x - 2^{x-2} = 24$                            | А 2  |
| 2 | $2^{x+1} - 7 \cdot 2^{x-2} = 16$                | Б 4  |
| 3 | $2^{x+4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 120$ | В 8  |
| 4 | $2^{x+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 56$ | Г 16 |
|   |   | Д 32 |

14.28. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та сумами їх коренів (А–Д).

- |   |   |     |
|---|---|-----|
| 1 | $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x} - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 16 = 0$  | А 3 |
| 2 | $4^x - 36 \cdot 2^x + 128 = 0$  | Б 4 |
| 3 | $16^x - 20 \cdot 4^x + 64 = 0$  | В 5 |
| 4 | $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x} - 30 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + 81 = 0$ | Г 2 |
|   |   | Д 7 |

Розв'яжіть завдання 14.29–14.43. Відповідь запишіть десятковим дробом.

14.29. Розв'язати рівняння  $0,125 \cdot 8^{2x-5} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-4}$ .

14.30. Розв'язати рівняння  $\sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[3]{4^x} \cdot 0,125^{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{4}$ . У відповідь записати суму коренів рівняння.

14.31. Розв'язати рівняння  $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \dots \cdot 5^{2x} = 0,04^{-28}$ .

14.32. Розв'язати рівняння  $2^{\sqrt{x+2}} - 2^{\sqrt{x+1}} = 12 + 2^{\sqrt{x-1}}$ .

14.33. Розв'язати рівняння  $7 \cdot 3^x - 5^{x+1} = 3^{x+3} - 5^{x+2}$ .

14.34. Розв'язати рівняння  $3^{2\sqrt{x+5}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x+5}} + 9 = 0$ . У відповідь записати суму коренів рівняння.

14.35. Указати найбільше ціле значення параметра  $a$ , за якого рівняння  $2^{2x} + (a+1) \cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0$  має два різних корені.

14.36. Розв'язати рівняння  $\frac{4}{2^x+2} - \frac{1}{2^x-3} = 2$ . У відповідь записати суму коренів рівняння.

14.37. Розв'язати рівняння  $8 \cdot 81^x + 9 \cdot 64^x = 17 \cdot 72^x$ . У відповідь записати суму коренів рівняння.

14.38. Розв'язати рівняння  $2^{\cos 2x} = 3 \cdot 2^{\cos^2 x} - 4$ . У відповідь записати  $\frac{x_0}{\pi}$ , де  $x_0$  — найменший додатний корінь рівняння.

14.39. Розв'язати рівняння  $50 \cdot 7^{\sqrt{-5x}} - 7^{\sqrt{-20x+1}} - 7 = 0$ .

14.40. Розв'язати рівняння  $3^{2x} + \frac{36}{3^{2x}} - \left(3^x + \frac{6}{3^x}\right) = 8$ . У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

14.41. Розв'язати рівняння  $81 \cdot (\sqrt{10} + 3)^{5x-61} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}-3}\right)^{5x-61}$ .

14.42. Розв'язати рівняння  $|x-5|^{\frac{x}{x-6}} = 1$ . У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

14.43. Розв'язати рівняння  $25^x - (2a+1) \cdot 5^x + a^2 + a = 0$ . У відповідь записати найбільше ціле значення  $a$ , за якого рівняння має два корені.

## ТЕМА 15. ПОКАЗНИКОВІ НЕРІВНОСТІ

Нерівність, яка містить змінну в показнику степеня, називають *показниковою*. Наприклад,  $2^{x+3} < 7$ ;  $5^{x^2} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$  тощо. Розв'язування показникових нерівностей, як правило, ґрунтується на властивостях показникової функції, а саме:

- функція  $y = a^x$  зростає, якщо  $a > 1$ ;
- функція  $y = a^x$  спадає, якщо  $0 < a < 1$ ;
- функція  $y = a^x$  набуває лише додатні значення.

Нерівність виду  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  рівносильна нерівності  $f(x) > g(x)$ , якщо  $a > 1$ , та нерівності  $f(x) < g(x)$ , якщо  $0 < a < 1$ .

**Приклад 1.** Розв'язати нерівність:

а)  $0,5^{2x+7} \leq 4$ ;                      б)  $5^{8x+1} + 5^{8x-1} < 130$ ;                      в)  $4^{\frac{x+1}{x}} - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 > 0$ ;

■ а)  $0,5^{2x+7} \leq 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+7} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ . Оскільки  $\frac{1}{2} < 1$ , то дана нерівність рівносильна такій:  $2x+7 \geq -2$ ;  $2x \geq -9$ ;  $x \geq -4,5$ .  $x \in [-4,5; +\infty)$ .

Відповідь.  $[-4,5; +\infty)$ .

б)  $5^{8x+1} + 5^{8x-1} < 130$ .  $5 \cdot 5^{8x} + \frac{5^{8x}}{5} < 130 \quad \left| \times 5 \right;$   $26 \cdot 5^{8x} < 650 \quad \left| : 26 \right;$   $5^{8x} < 25$ ;  $5^{8x} < 5^2$ ;  $8x < 2$ ;  $x < 0,25$ .  $x \in (-\infty; 0,25)$ .

Відповідь:  $(-\infty; 0,25)$ .

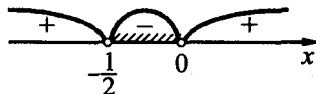
в)  $4^{\frac{x+1}{x}} - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 > 0$ ;  $4^{1+\frac{1}{x}} - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 > 0$ ;  $4 \cdot 4^{\frac{1}{x}} - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 > 0$ . Зробимо заміну:  $2^{\frac{1}{x}} = a$ .

Тоді  $4^{\frac{1}{x}} = (2^2)^{\frac{1}{x}} = \left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2 = a^2$ .  $4a^2 - 17a + 4 > 0$ ;  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = \frac{1}{4}$ .



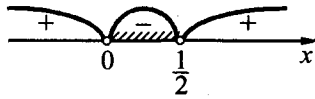
$a < \frac{1}{4}$  або  $a > 4$ . Повернемося до заміни:

1.  $2^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{4}$ ;  $2^{\frac{1}{x}} < 2^{-2}$ ;  $\frac{1}{x} < -2$ ;  $\frac{1+2x}{x} < 0$ .



$x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ .

$$2. 2^{\frac{1}{x}} > 4; 2^{\frac{1}{x}} > 2^2; \frac{1}{x} > 2; \frac{1-2x}{x} > 0; \frac{2(x-1)}{x} < 0.$$



$$x \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Відповідь.  $\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$ . ■

**Приклад 2.** Розв'язати нерівність  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{9}\right)^8$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$	$(-4; 4)$	$(-\sqrt{10}; \sqrt{10})$	$(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$	$(-\infty; +\infty)$

$$\blacksquare \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{9}\right)^8; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^8; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{16}; \quad x^2 < 16; \quad x^2 - 16 < 0;$$

$$(x+4)(x-4) < 0; x \in (-4; 4).$$

Відповідь. Б. ■

**Завдання 15.1–15.21** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**15.1.** Розв'язати нерівність  $5^x > 5$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1)$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(5; +\infty)$

**15.2.** Розв'язати нерівність  $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 1)$

**15.3.** Знайти множину розв'язків нерівності  $0,7^x < 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(1; +\infty)$

**15.4.** Розв'язати нерівність  $2^x < \frac{1}{8}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$	$(-3; +\infty)$	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

15.5. Розв'язати нерівність  $9^{x+5} > 27^x$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 5)$	$(10; +\infty)$	$(-\infty; 10)$	$(0; 10)$	будь-яке дійсне число

15.6. Яка з наведених нерівностей має розв'язки?

А	Б	В	Г	Д
$7^x < -1$	$7^{ x } < 0,7$	$7^{x^2} < 1$	$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} < 2$	$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} > 2$

15.7. Розв'язати нерівність  $7^x - 7^{\frac{1}{x}} > 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (0; 1)$	$(-1; 1)$	$(1; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$	$(-1; 0) \cup (1; +\infty)$

15.8. Знайти множину розв'язків нерівності  $4^x > 3$ .

А	Б	В	Г	Д
$R$	$(-\infty; \log_4 3)$	$(-\infty; \log_3 4)$	$(\log_4 3; +\infty)$	$(\log_3 4; +\infty)$

15.9. Розв'язати нерівність  $1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left[0; \frac{1}{3}\right]$	$[0; 3]$	$\left[\frac{1}{3}; 1\right]$	$[-3; 0]$	$\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$

15.10. Розв'язати нерівність  $3^x > 5^x$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(1; +\infty)$	$\emptyset$

15.11. Розв'язати нерівність  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-20} > 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$	$(-5; 4)$	$(4; 5)$	$\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right)$	$(-4; 5)$

15.12. Розв'язати нерівність  $2^{x+1} + 2^x < 24$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-3; +\infty)$	$(-\infty; -3)$	$(3; +\infty)$	$(0; 3)$	$(-\infty; 3)$



15.13. Знайти множину розв'язків нерівності  $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-6; 8)$	$(2; 4)$	$(1; 2)$	$(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

15.14. Розв'язати нерівність  $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (-1; 1)$	$(-1; 1)$	$[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$	$(-3; 3)$	$(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

15.15. Розв'язати нерівність  $3^x + 3^{2-x} > 10$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$	$(0; 2)$	$(-\infty; 3) \cup (10; +\infty)$	$(1; 9)$

15.16. Указати найменший розв'язок нерівності  $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^2$ .

А	Б	В	Г	Д
0	-4	4	-2	Не існує

15.17. Розв'язати нерівність  $3^{|x+2|} > 27$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$	$(-5; 5)$	$(-1; 1)$	$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$	$\emptyset$

15.18. Розв'язати нерівність  $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} < \frac{1}{8}$ .

А	Б	В	Г	Д
$R$	$(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$	$(-4; 4)$	$(4; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

15.19. Розв'язати нерівність  $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - 5x + 6} \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$[1; 2) \cup (3; +\infty)$	$[0; 2] \cup [3; +\infty)$	$[3; +\infty)$	$[1; +\infty)$	$[1; 2] \cup [3; +\infty)$

15.20. Розв'язати нерівність  $2^x > \sin x$ .

А	Б	В	Г	Д
$R$	$\emptyset$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	0	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

15.21. За якого значення параметра  $a$  нерівність  $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$  не має розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
$a > 1$	$a \neq 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a = 0$

Завдання 15.22–15.25 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

15.22. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |   |                                   |   |                      |
|---|-----------------------------------|---|----------------------|
| 1 | $7^x > 1$                         | А | $(1; +\infty)$       |
| 2 | $7^x > -1$                        | Б | $(-\infty; 0)$       |
| 3 | $\left(\frac{1}{7}\right)^x < -1$ | В | $(0; +\infty)$       |
| 4 | $\left(\frac{1}{7}\right)^x > 1$  | Г | $(-\infty; +\infty)$ |
|   |                                   | Д | $\emptyset$          |

15.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |   |                                  |   |                 |
|---|----------------------------------|---|-----------------|
| 1 | $(\lg 5)^{x+2} > (\lg 5)^{-1}$   | А | $(6; +\infty)$  |
| 2 | $(\lg 12)^{x+2} > (\lg 12)^{-1}$ | Б | $(-\infty; 7)$  |
| 3 | $(\sin 3)^{x-3} > (\sin 3)^4$    | В | $(-\infty; -3)$ |
| 4 | $(\ln 3)^{x-3} > (\ln 3)^3$      | Г | $(-\infty; 3)$  |
|   |                                  | Д | $(-3; +\infty)$ |

15.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |   |   |   |                                |
|---|---|---|--------------------------------|
| 1 | $1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 16$ | А | $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$ |
| 2 | $1 \leq 2^x \leq 16$                        | Б | $[-4; 0]$                      |
| 3 | $1 \leq 16^x \leq 2$                        | В | $\left[0; \frac{1}{4}\right]$  |
| 4 | $1 \leq \left(\frac{1}{16}\right)^x \leq 2$ | Г | $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$  |
|   |   | Д | $[0; 4]$                       |

15.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |   |  |   |                                   |
|---|--|---|-----------------------------------|
| 1 | $2^{ x +2} > \frac{1}{8}$                        | А | $(1; +\infty)$                    |
| 2 | $2^{ x +2} > 8$                                  | Б | $(-1; 1)$                         |
| 3 | $\left(\frac{1}{2}\right)^{ x +2} > 8$           | В | $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ |
| 4 | $\left(\frac{1}{2}\right)^{ x +2} > \frac{1}{8}$ | Г | $(-\infty; +\infty)$              |
|   |  | Д | $\emptyset$                       |

**Розв'яжіть завдання 15.26–15.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

15.26. Розв'язати нерівність  $\sqrt{27} \cdot 3^{7x-x^2} \geq \frac{\sqrt{243}}{3^{2x+1}}$ . У відповідь записати суму всіх цілих розв'язків нерівності.

15.27. Розв'язати нерівність  $2^{x^2+3x} - 8 \cdot 2^x > 0$ . У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

15.28. Розв'язати нерівність  $5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} \geq 56$ . У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

15.29. Розв'язати нерівність  $2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$ . У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

15.30. Розв'язати нерівність  $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leq 1$ . У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

15.31. Розв'язати нерівність  $(2^x - 8)(x^2 - 4x + 3) > 0$ . У відповідь записати добуток усіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

15.32. Розв'язати нерівність  $\frac{1}{2^{x+1}-1} > \frac{1}{2^x+3}$ . У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

15.33. Розв'язати нерівність  $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x < 0$ . У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

15.34. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності  $7^{x-5} > 3^{x^2+x-30}$ .

15.35. Розв'язати нерівність  $(\sqrt{2}-1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq (\sqrt{2}+1)^{-x}$ . У відповідь записати найбільший розв'язок нерівності.

15.36. Розв'язати нерівність  $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} > 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$ . У відповідь записати суму всіх розв'язків нерівності.

15.37. Розв'язати нерівність  $\sqrt{9^x + 24} - 2 > 3^{x+1}$ . У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності.

15.38. Розв'язати нерівність  $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-0,5x^2} \geq 2^{|2x-10|+x}$ . У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

15.39. Розв'язати нерівність  $7^{x-5} > 3^{x^2+x-30}$ . У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

15.40. Розв'язати нерівність  $(\sqrt{5}-2)^x + (\sqrt{5}+2)^x < 2\sqrt{5}$ . У відповідь записати суму всіх розв'язків нерівності.

15.41. Розв'язати нерівність  $(x+3)^{-2x^2-7x-5} < 1$ . У відповідь записати суму всіх цілих недодатних розв'язків нерівності.

## ТЕМА 16. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

Рівняння, яке містить змінну під знаком логарифма або в основі логарифма, називають **логарифмічним**. Найпростішим логарифмічним рівнянням є рівняння виду  $\log_a x = b$ , де  $a > 0, a \neq 1$ .

Рівняння виду  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \text{ або } g(x) > 0. \end{cases}$$

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння:

а)  $\lg(5x-3) = 1$ ;

б)  $\log_2(2x+1) = \log_2(9x+17) - \log_2(x+5)$ ;

в)  $\log_5 \log_4 \log_3 x = 0$ ;

г)  $\log_2^2 x - \log_2 x^5 = 4 \log_2 64$ ;

д)  $\log_8(x-7) + \log_3(7-x) = 11$ .

■ а)  $\lg(5x-3) = 1$ ;  $\lg(5x-3) = \lg 10$ ;  $5x-3 = 10$ ;  $x = 2,6$ .

Відповідь. 2,6.

б)  $\log_2(2x+1) = \log_2(9x+17) - \log_2(x+5)$ ;  $\log_2(2x+1) + \log_2(x+5) = \log_2(9x+17)$ .

$$\begin{cases} \log_2((2x+1)(x+5)) = \log_2(9x+17); \\ 2x+1 > 0; \\ 9x+17 > 0; \\ x+5 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 + 11x + 5 = 9x + 17; \\ x > -\frac{1}{2}; \\ x > -\frac{17}{9}; \\ x > -5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 + 2x - 12 = 0; \\ x > -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3; \\ x_2 = 2; \\ x > -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{Отже, } x = 2 \text{ — корінь рівняння.}$$

Відповідь. 2.

в)  $\log_5 \log_4 \log_3 x = 0$ .  $\log_5 \log_4 \log_3 x = \log_5 1$ ;  $\log_4 \log_3 x = 1$ .  $\log_4 \log_3 x = \log_4 4$ ;  
 $\log_3 x = 4$ ;  $x = 3^4$ ;  $x = 81$ .

Відповідь. 81.

г)  $\log_2^2 x - \log_2 x^5 = 4 \log_2 64$ ;  $\log_2^2 x - 5 \log_2 x = 24$ . Заміна:  $\log_2 x = a$ . Тоді матимемо:  
 $\log_2^2 x = (\log_2 x)^2 = a^2$ .  $a^2 - 5a - 24 = 0$ ;  $a_1 = 8$ ,  $a_2 = -3$ .  $\log_2 x = 8$ ;  $x = 2^8$ ;  $x = 256$  або  
 $\log_2 x = -3$ ;  $x = 2^{-3}$ ;  $x = \frac{1}{8}$ .

Відповідь.  $\frac{1}{8}$ ; 256.

д)  $\log_8(x-7) + \log_3(7-x) = 11$ . Визначимо ОДЗ рівняння:  $\begin{cases} x-7 > 0, \\ 7-x > 0; \end{cases} \begin{cases} x > 7, \\ x < 7; \end{cases} x \in \emptyset$ .

Оскільки ОДЗ дорівнює порожній множині, то рівняння коренів не має.

Відповідь.  $\emptyset$ . ■

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння  $\log_x 7 + 2\log_x 7 = 3$ .

А	Б	В	Г	Д
Немає коренів	1; 7	$\sqrt[3]{56}$	Інша відповідь	7

■  $\log_x 7 + 2\log_x 7 = 3; 3\log_x 7 = 3; \log_x 7 = 1; \log_x 7 = \log_x x; x = 7$ .

Відповідь. Д. ■

Завдання 16.1–16.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

16.1. Розв'язати рівняння  $\log_a x = c$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	$a \cdot c$	$c^a$	$a^c$	$\frac{c}{a}$

16.2. Розв'язати рівняння  $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	-16	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}; 16$	16

16.3. Розв'язати рівняння  $\log_2(-x) = 5$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	32	-32	$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{32}$

16.4. Розв'язати рівняння  $\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	-3; 2	-2; 1	-2; 3	-1; 2

16.5. Скільки коренів має рівняння  $\lg(x^4 - 10x^2) = \lg 3x^3$ ?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

16.6. Розв'язати рівняння  $\log_6(x-2) + \log_6(x-1) = 1$  і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
$(-2,1; -1,9)$	$(3,9; 4,1)$	$(2,9; 3,1)$	$(1,9; 3,1)$	$(5,9; 6,1)$

16.7. Розв'язати рівняння  $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 1$  і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
$(0,9; 1,1)$	$(1,9; 2,1)$	$(2,9; 3,1)$	$(3,9; 4,1)$	$(5,9; 6,1)$

16.8. Розв'язати рівняння  $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 3 - \log_2 4$  і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
$(-1,1; -0,9)$	$(-0,1; 0,1)$	$(0,9; 1,1)$	$(1,9; 2,1)$	$(3,9; 4,1)$

16.9. Розв'язати рівняння  $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$  і вказати суму його коренів.

А	Б	В	Г	Д
-8,5	7,5	-2	2	8,5

16.10. Указати рівняння, рівносильне рівнянню  $\log_3 x + \log_9 x + \log_{81} x = 7$ .

А	Б	В	Г	Д
$\log_3 x = \frac{49}{4}$	$\log_3 x = 1$	$\log_3 x = 4$	$\log_3 x = -\frac{7}{5}$	$\log_3 x = 35$

16.11. Указати рівняння, рівносильне рівнянню  $x^{\lg x} = 10$ .

А	Б	В	Г	Д
$2\lg x = 10$	$2\lg x = 1$	$\lg^2 x = 10$	$\lg^2 x = 1$	$\lg^2 x = 2$

16.12. Указати рівняння, яке утворюється з рівняння  $x^{\lg x} = 1000x^2$  у результаті логарифмування обох його частин.

А	Б	В	Г	Д
$\lg^2 x + 2\lg x + 1000 = 0$	$\lg^2 x - 2\lg x - 1000 = 0$	$\lg^2 x = 6\lg x$	$\lg^2 x + 2\lg x + 3 = 0$	$\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$

16.13. Указати рівняння, рівносильне рівнянню  $2\lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$ .

А	Б	В	Г	Д
$5\lg(-x) = 4$	$3\lg(-x) = 4$	$\lg^2 x - 4\lg x + 4 = 0$	$\lg^2(-x) - 4\lg(-x) + 4 = 0$	$\lg^2(-x) - 4\lg(-x) - 4 = 0$

16.14. Розв'язати рівняння  $\log_a \log_b \log_c x = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$c^b$	$a^{bc}$	$b^c$	$a^c$	$abc$

16.15. Указати кількість коренів рівняння  $\log_2^2 x^2 - 5 \log_2 x^4 + 24 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
Чотири	три	два	один	жодного

16.16. Розв'язати рівняння  $\lg x \log_2 x = \lg 2$  і знайти суму його коренів.

А	Б	В	Г	Д
2,5	3,5	4,5	10,5	1

16.17. Розв'язати рівняння  $5^{\log_3 x} + x^{\log_3 5} = 50$  і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(3,9; 4,1)	(4,9; 5,1)	(5,9; 6,1)	(6,9; 7,1)	(8,9; 9,1)

16.18. Указати рівняння, рівносильне рівнянню  $\lg x(x+9) + \lg \frac{x+9}{x} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\lg x = 0$	$\lg(x+9) = 0$	$\lg x  = 0$	$\lg x+9  = 0$	$\lg -x-9  = 0$

16.19. Розв'язати рівняння  $5^{2^x} = 7$ .

А	Б	В	Г	Д
$\log_5 \log_2 7$	$\log_2 \log_5 7$	$\log_7 \log_5 2$	$\log_7 \log_2 5$	$\log_2 \log_7 5$

16.20. За якого найбільшого значення параметра  $a$  рівняння  $(x-a) \log_2 (3x-8) = 0$  має один корінь?

А	Б	В	Г	Д
-3	-1	0	1	3

Завдання 16.21–16.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

16.21. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\log_2^2 x = 1$

А {1}

2  $2 \log_2 x - \log_2 (2-x) = 0$

Б  $\left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$

3  $2 \cdot 3^x = -6$

В  $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$

4  $3 \cdot 2^{2x} = 2 \cdot 3^{2x}$

Г  $\emptyset$

Д  $\{-2; 1\}$



16.22. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

- |                    |                   |
|--------------------|-------------------|
| 1 $\log_3(-x) = 4$ | А $-\frac{1}{64}$ |
| 2 $\log_4x = -3$   | Б $\frac{1}{64}$  |
| 3 $\log_3x = -4$   | В $-64$           |
| 4 $\log_4(-x) = 3$ | Г $\frac{1}{81}$  |
|                    | Д $-81$           |

16.23. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

- |                             |      |
|-----------------------------|------|
| 1 $\log_2\log_3\log_4x = 0$ | А 8  |
| 2 $\log_4\log_3\log_2x = 0$ | Б 9  |
| 3 $\log_3\log_2\log_4x = 0$ | В 16 |
| 4 $\log_2\log_4\log_3x = 0$ | Г 64 |
|                             | Д 81 |

16.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та добутками їх коренів (А–Д).

- |                                  |                  |
|----------------------------------|------------------|
| 1 $\log_2^2x + 4\log_2x + 3 = 0$ | А 4              |
| 2 $\log_2^2x + 2\log_2x - 3 = 0$ | Б 16             |
| 3 $\log_2^2x - 4\log_2x + 3 = 0$ | В $\frac{1}{4}$  |
| 4 $\log_2^2x - 2\log_2x - 3 = 0$ | Г $\frac{1}{2}$  |
|                                  | Д $\frac{1}{16}$ |

16.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів (А–Д).

- |                                  |           |
|----------------------------------|-----------|
| 1 $\lg^5x - 3\lg^2x - 4\lgx = 0$ | А Жодного |
| 2 $\lg^4x - 5\lg^2x + 4 = 0$     | Б Два     |
| 3 $\lg^4x + 5\lg^2x + 4 = 0$     | В Три     |
| 4 $\lg^4x + 3\lg^2x - 4 = 0$     | Г Чотири  |
|                                  | Д П'ять   |

16.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

- |                 |                   |
|-----------------|-------------------|
| 1 $5^{2^x} = 9$ | А $\log_5\log_92$ |
| 2 $2^{5^x} = 9$ | Б $\log_9\log_25$ |
| 3 $2^{9^x} = 5$ | В $\log_2\log_95$ |
| 4 $9^{2^x} = 5$ | Г $\log_5\log_29$ |
|                 | Д $\log_2\log_99$ |

**Розв'яжіть завдання 16.27–16.39. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

16.27. Розв'язати рівняння  $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7)$ .

16.28. Розв'язати рівняння  $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2(x^2-25) = 0$ .

16.29. Розв'язати рівняння  $\lg^2 x^4 - \lg x^{14} = 2$ . У відповідь записати найменший корінь рівняння.

16.30. Розв'язати рівняння  $4 \lg x^2 - \lg^2(-x) = 16$ . У відповідь записати  $x_0 : 1000$ , де  $x_0$  — корінь рівняння.

16.31. Розв'язати рівняння  $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$ . У відповідь записати модуль різниці коренів рівняння.

16.32. Розв'язати рівняння  $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg \frac{1}{x}$ . У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

16.33. Розв'язати рівняння  $\log_5 x + \log_x 25 = 3$ . У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.34. Розв'язати рівняння  $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x = 36$ .

16.35. Розв'язати рівняння  $x^{\lg x} = 1000x^2$ . У відповідь записати найменший корінь рівняння.

16.36. Розв'язати рівняння  $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$ . У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.37. Розв'язати рівняння  $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10$ . У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.38. Розв'язати рівняння  $3 \log_x 4 + 2 \log_{4x} 4 + 3 \log_{16x} 4 = 0$ . У відповідь записати суму коренів рівняння.

16.39. Розв'язати рівняння  $|\log_{\sqrt{5}} x - 4| - |\log_5 x - 4| = 1$ . У відповідь записати добуток коренів рівняння.

## ТЕМА 17. ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ

Нерівність, яка містить змінну під знаком логарифма, називають *логарифмічною*. Наприклад,  $\log_5 x < 3$ ;  $\lg x + \lg(x+8) \geq \lg(4-5x)$  тощо. Розв'язування логарифмічних нерівностей ґрунтується на тому, що логарифмічна функція  $y = \log_a x$  монотонно зростає, якщо  $a > 1$ , і монотонно спадає, якщо  $0 < a < 1$ . Також слід ураховувати, що підлогарифмічний вираз може набувати лише додатних значень.

Нерівність  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ , якщо  $a > 1$ , рівносильна системі  $\begin{cases} f(x) > g(x); \\ g(x) > 0, \end{cases}$  а якщо  $0 < a < 1$ , — системі  $\begin{cases} f(x) < g(x); \\ f(x) > 0. \end{cases}$

**Приклад 1.** Розв'язати нерівність:

а)  $\log_3(x^2 - 5x - 5) > 2$ ;                      б)  $\log_{\cos 1} \log_8(x^2 + 6x + 1) > 0$ ;

■ а)  $\log_3(x^2 - 5x - 5) > 2$ ;

$\log_3(x^2 - 5x - 5) > \log_3 9$ . Оскільки основа логарифмів  $3 > 1$ , то дана нерівність рівносильна такій:  $x^2 - 5x - 5 > 9$ ;  $x^2 - 5x - 14 > 0$ ;  $(x-7)(x+2) > 0$ ;



$x \in (-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$ .

Відповідь.  $(-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$ .

б)  $\log_{\cos 1} \log_8(x^2 + 6x + 1) > 0$ ;

$\log_{\cos 1} \log_8(x^2 + 6x + 1) > \log_{\cos 1} 1$ . Оскільки основа логарифмів  $0 < \cos 1 < 1$ , то дана нерівність рівносильна подвійній нерівності:

$0 < \log_8(x^2 + 6x + 1) < 1$ ;

$\log_8 1 < \log_8(x^2 + 6x + 1) < \log_8 8$ ;

$1 < x^2 + 6x + 1 < 8$ ;

$\begin{cases} x^2 + 6x + 1 > 1; \\ x^2 + 6x + 1 < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 6x > 0; \\ x^2 + 6x - 7 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+6) > 0; \\ (x+7)(x-1) < 0. \end{cases}$



$x \in (-7; -6) \cup (0; 1)$ .

Відповідь.  $(-7; -6) \cup (0; 1)$ . ■

Завдання 17.1–17.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

17.1. Знайти множину розв'язків нерівності  $\log_3(x-4) \leq \log_3 8$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 12)$	$(-\infty; 12]$	$[4; 12]$	$(4; 12]$	$(0; 12]$

17.2. Розв'язати нерівність  $\log_{0,1}(2x-5) > \log_{0,1} x$ .

А	Б	В	Г	Д
$(2,5; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$	$(0; 5)$	$(2,5; 5)$

17.3. Розв'язати нерівність  $\log_x x > \log_x 3 + \log_x 5$ .

А	Б	В	Г	Д
$(15; +\infty)$	$(-\infty; 15)$	$(0; 15)$	$(8; +\infty)$	$(0; 8)$

17.4. Розв'язати нерівність  $\log_{0,1}(2x-1) \geq \log_{0,1} 10 - 4\log_{0,1} 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$(0; 3]$	$[3; +\infty)$	$(-\infty; 3]$	$(0,5; 3]$	$(0,5; 4,5]$

17.5. Знайти множину розв'язків нерівності  $\log_{\sin 1} x > 2\log_{\sin 1} 7$ .

А	Б	В	Г	Д
$(49; +\infty)$	$(0; 49)$	$(14; +\infty)$	$(0; 14)$	$(-\infty; 49)$

17.6. Знайти множину розв'язків нерівності  $\log_5 x < 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 25)$	$(25; +\infty)$	$(0; 25)$	$(0; 2)$	$(-\infty; 2)$

17.7. Скільки цілих чисел є розв'язками нерівності  $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \geq -1$ ?

А	Б	В	Г	Д
Одне	два	три	жодне	більше, ніж три

17.8. Розв'язати нерівність  $\log_8(3x-10) < \frac{1}{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(0; 3\frac{1}{3})$	$(-\infty; 3\frac{1}{3})$	$(4; +\infty)$	$(-\infty; 4)$	$(3\frac{1}{3}; 4)$

17.9. Вказати найбільший цілий розв'язок нерівності  $\log_{\frac{1}{7}}(x+3) > -1$ .

А	Б	В	Г	Д
6	7	4	3	-3

17.10. Розв'язати нерівність  $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3(2-x)} < 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2)$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$

17.11. Скільки цілих розв'язків має нерівність  $-2 < \log_{\frac{1}{2}} x < 3$ ?

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	жодного	більше, ніж три

17.12. Розв'язати нерівність  $\log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2 \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$	$[1; 2]$	$[3; 9]$	$(-\infty; 3] \cup [9; +\infty)$	$(3; 9)$

17.13. Розв'язати нерівність  $\lg^2 x - 4 \lg x + 3 \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$	$(0; 1] \cup [3; +\infty)$	$[10; 1000]$	$(-\infty; 10] \cup [1000; +\infty)$	$(0; 10] \cup [1000; +\infty)$

17.14. Розв'язати нерівність  $\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x) \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{1}{3}; 5\right]$	$(1; 5]$	$(0; 1]$	$(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$	$(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$

17.15. Скільки цілих розв'язків має нерівність  $\frac{\sqrt{x+3}}{\log_2(2x-3)} \leq 0$ ?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	більше, ніж три

17.16. Знайти множину розв'язків нерівності  $\log_x 5 < 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$(0; 1) \cup (1; +\infty)$	$(0; 1) \cup (5; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(0; 5) \cup (5; +\infty)$	$(0; 1) \cup (1; 5)$

17.17. Вказати цілі розв'язки нерівності  $\log_{\frac{2x-1}{3}} 2 < 0$ .

А	Б	В	Г	Д
1; 2	1	0; 1	0; 1; 2	2; 3

17.18. Розв'язати нерівність  $\log_3(x+3)^2 \leq 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-6; 0]$	$[-6; -3) \cup (-3; +\infty)$	$(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$	$(-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$	$[-6; -3) \cup (-3; 0]$

17.19. Розв'язати нерівність  $(x-2)\log_{0,5} x \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$	$[1; 2]$	$(0; 1] \cup [2; +\infty)$	$(0; 2]$	$(0; 1) \cup (2; +\infty)$

17.20. Розв'язати нерівність  $x^x < 1$ , якщо  $x > 0$ , застосувавши логарифмування.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(0; 1)$	$(-\infty; 0) \cup (0; 1)$	1

17.21. Розв'язати нерівність  $\left| \log_{\frac{1}{2}} x \right| \leq 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left[ \frac{1}{2}; 2 \right]$	$\left[ \frac{1}{2}; +\infty \right)$	$\left( 0; \frac{1}{2} \right]$	$\left( 0; \frac{1}{2} \right)$	$[2; +\infty)$

17.22. Розв'язати нерівність  $|\log_3 x| \geq 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left[ \frac{1}{3}; 3 \right]$	$[3; +\infty)$	$\left( -\infty; -\frac{1}{3} \right) \cup [3; +\infty)$	$\left( 0; \frac{1}{3} \right] \cup [3; +\infty)$	$\left[ -\frac{1}{3}; 0 \right) \cup [3; +\infty)$

Завдання 17.23–17.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

17.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та рівносильними їм нерівностями або системами (А–Д).

1  $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -2$

А  $x+1 > 4$

2  $\log_2(x+1) > 2$

Б  $x+1 < 4$

3  $2^{x+1} < 16$

В  $\begin{cases} x+1 < 4; \\ x+1 > 0 \end{cases}$

4  $0,5^{x+1} < 4$

Г  $x+1 > -2$

Д  $x+1 < -2$

17.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\log_4 x < 0$

А  $(-\infty; -1)$

2  $\log_4 x > 0$

Б  $(-\infty; 1)$

3  $\log_4(-x) < 0$

В  $(1; +\infty)$

4  $\log_4(-x) > 0$

Г  $(-1; 0)$

Д  $(0; 1)$

17.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |                        |                   |
|------------------------|-------------------|
| 1 $\log_{0,5} x < 0$   | А $(-\infty; -1)$ |
| 2 $\log_{0,5} x > 0$   | Б $(-\infty; 1)$  |
| 3 $\log_{0,5}(-x) < 0$ | В $(1; +\infty)$  |
| 4 $\log_{0,5}(-x) > 0$ | Г $(-1; 0)$       |
|                        | Д $(0; 1)$        |

17.26. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |   |                            |
|---|----------------------------|
| 1 $\log_9 x < \frac{1}{2}$              | А $(0; 9)$                 |
| 2 $\log_{\frac{1}{3}} x > -2$           | Б $(9; +\infty)$           |
| 3 $\log_{\frac{1}{9}} x < -\frac{1}{2}$ | В $(\frac{1}{3}; +\infty)$ |
| 4 $\log_{\frac{1}{9}} x < \frac{1}{2}$  | Г $(0; 3)$                 |
|   | Д $(3; +\infty)$           |

17.27. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |  |                   |
|--|-------------------|
| 1 $\log_5(x-2) < \log_5(-x)$                         | А $(-1; +\infty)$ |
| 2 $\log_{\frac{1}{5}}(2-x) < \log_{\frac{1}{5}}(-x)$ | Б $(-1; 0)$       |
| 3 $\log_5(x+2) > \log_5(-x)$                         | В $(-2; -1)$      |
| 4 $\log_{\frac{1}{5}}(x+2) > \log_{\frac{1}{5}}(-x)$ | Г $(-\infty; 0)$  |
|  | Д $\emptyset$     |

17.28. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

- |   |                  |
|---|------------------|
| 1 $\log_2(\log_5 x) < 0$                                    | А $(0; 0,5)$     |
| 2 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_5 x) < 0$                        | Б $(1; 2)$       |
| 3 $\log_5(\log_2 x) < 0$                                    | В $(1; 5)$       |
| 4 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 0$ | Г $(-\infty; 5)$ |
|   | Д $(5; +\infty)$ |

Розв'яжіть завдання 17.29–17.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.

17.29. Розв'язати нерівність  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > -1$ . У відповідь записати найменше натуральне число, яке не є розв'язком нерівності.

17.30. Розв'язати нерівність  $\lg(x-2) + \lg(27-x) < 2$ . У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності.

- 17.31. Розв'язати нерівність  $\lg x + 6 \log_x 10 \leq 5$ . У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності.
- 17.32. Розв'язати нерівність  $\lg^2(-x) + \lg x^2 - 3 < 0$ . У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності.
- 17.33. Розв'язати нерівність  $\lg^2 100x - 5 \lg x > 6$ . У відповідь записати кількість натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.
- 17.34. Розв'язати нерівність  $9^{\log_3^2 x} < 4x^{\log_3 x} - 3$ . У відповідь записати суму всіх натуральних розв'язків нерівності.
- 17.35. Розв'язати нерівність  $\log_x \frac{2x}{x-3} \leq \frac{1}{2}$ . У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.
- 17.36. Розв'язати нерівність  $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$ . У відповідь записати найменше натуральне число, яке не є розв'язком нерівності.
- 17.37. Розв'язати нерівність  $x^{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$ . У відповідь записати найменше натуральне число, яке не є розв'язком нерівності.
- 17.38. Розв'язати нерівність  $\log_2(5-x) \log_{x+1} \frac{1}{8} \geq -6$ . У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.
- 17.39. Розв'язати нерівність  $\log_{\frac{1}{2}} |x| \geq |x| - 1$ . У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.
- 17.40. Розв'язати нерівність  $\log_x 3x \leq \sqrt{\log_x(3x^7)}$ . У відповідь записати добуток усіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.
- 17.41. Розв'язати нерівність  $\log_{x+1} |x-2| \leq 1$ . У відповідь записати суму всіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.



## ТЕМА 18. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

*Тригонометричними* називають рівняння, які містять змінну під знаком тригонометричних функцій. Рівняння виду  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ ,  $\operatorname{ctg} x = a$ , де  $a$  — деяке відоме число, називають *найпростішими тригонометричними рівняннями*. Формули коренів таких рівнянь подано в таблиці:

Рівняння	Корені
$\sin x = a$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$ , якщо $ a  \leq 1$ ; коренів немає, якщо $ a  > 1$ .
	часткові випадки
	$\sin x = 0$ $x = \pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$
	$\sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$
	$\sin x = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$ , якщо $ a  \leq 1$ ; коренів немає, якщо $ a  > 1$ .
	часткові випадки
	$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$
	$\cos x = 1$ $x = 2\pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$
	$\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arccot} a + \pi k$ , $k \in \mathbb{Z}$

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння:

а)  $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ ;      б)  $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$ ;      в)  $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ ;

■ а)  $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ ;

$$5x + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad 5x = \frac{\pi}{12} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{60} + \frac{\pi k}{5},$$

$k \in \mathbb{Z}$ .

Відповідь.  $x = \frac{\pi}{60} + \frac{\pi k}{5}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

б)  $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$ .

Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$-2 \sin 2x \cdot \sin x + \sin 2x = 0; \sin 2x \cdot (1 - 2 \sin x) = 0;$$

$$\sin 2x = 0; \quad \text{або} \quad 1 - 2 \sin x = 0;$$

$$2x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь.  $x = \frac{\pi k}{2}; x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}$ .

в)  $2 \sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ .

$$2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0; -2 \cos^2 x + \cos x + 1 = 0; 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

$$\cos x = 1; \quad \text{або} \quad \cos x = -\frac{1}{2};$$

$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, .$$

Відповідь.  $x = 2\pi k, \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}$ . ■

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$-\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

■  $\cos 2x = -\frac{1}{2}; 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ .

Відповідь. Г. ■

**Приклад 3.** Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння  $\cos 3x = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$	$-\frac{\pi}{2}$

■  $\cos 3x = 1; 3x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, x = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \frac{2k\pi}{3} < 0; k\pi < 0; \cdot k < 0; k = -1$ . Отже,

$$x = -\frac{2\pi}{3}$$

Відповідь. В. ■

**Завдання 18.1–18.22** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**18.1.** Розв'язати рівняння  $2\sin x = -1$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},$ $n \in Z$	$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},$ $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},$ $n \in Z$	$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in Z$

**18.2.** Розв'язати рівняння  $\sin \pi x = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi^2 n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{1}{2} + n,$ $n \in Z$	$x = \frac{1}{2} + 2n,$ $n \in Z$

**18.3.** Розв'язати рівняння  $2\cos 2x = -\sqrt{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	$x = \pm \frac{3\pi}{8} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$

**18.4.** Розв'язати рівняння  $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$

**18.5.** Розв'язати рівняння  $(\operatorname{ctg} x)^{100} = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	0	$x = \operatorname{arccotg} 100 + \pi n,$ $n \in Z$

**18.6.** Указати рівняння, яке має хоча б один корінь.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x = \frac{\pi}{3}$	$\arccos x = -\frac{\pi}{3}$	$\arcsin x = \pi$	$\operatorname{arctg} x = 2$	$\operatorname{arccotg} x = 3$

**18.7.** Указати рівняння, яке має тільки один корінь.

А	Б	В	Г	Д
$\sin x = -1$	$\cos x = -2$	$\operatorname{arctg} x = 1$	$\operatorname{tg} x = 1$	$\frac{\cos x - 1}{\sin x} = 0$

18.8. Розв'язати рівняння  $\sin^2 x - \sin x = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi n, x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi n, x = -\frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$

18.9. Знайти корінь рівняння  $\sin 2x - 4 \cos x = 0$ , який належить проміжку  $[2\pi; 3\pi]$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$

18.10. Розв'язати рівняння  $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},$ $n \in Z$	рівняння коренів немає

18.11. Розв'язати рівняння  $\frac{\cos x}{\sin x - 1} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = -\frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$

18.12. Розв'язати рівняння  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$

18.13. Розв'язати рівняння  $\cos^2 x + 5 \cos x - 6 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm \arccos 1 + \pi n,$ $n \in Z$	$x = 2\pi n, n \in Z,$ $x = \pm(\pi - \arccos 6) +$ $+ 2\pi k, k \in Z$	$x = \pi n,$ $n \in Z$	$x = 2\pi n,$ $n \in Z$

18.14. Розв'язати рівняння  $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{5\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \arctg(-\sqrt{2}) + \pi n,$ $n \in Z$

18.15. Розв'язати рівняння  $\sin x^2 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{\pi n}, n \in N$	0	$\{0\} \cup \{\sqrt{2\pi n}, n \in N\}$	$-\sqrt{2\pi n}, n \in N$	$\{0\} \cup \{\pm\sqrt{\pi n}, n \in N\}$

18.16. Розв'язати рівняння  $\operatorname{tg} \sqrt{x} = -1$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = \left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2, n \in N$	$x = -\frac{\pi^2}{16} + \pi^2 n^2, n \in N$	$x = \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2, n \in N$	$x = \frac{\pi^2}{16} + \pi^2 n^2, n \in N$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in N$

18.17. У якому вигляді можна подати розв'язок рівняння  $\cos(\pi x) = x^2 - 4x + 5$ ?

А	Б	В	Г	Д
$\log_{\pi} \pi^2$	$\log_{\pi} \pi$	$\log_{\pi} \frac{\pi}{2}$	$\log_{\frac{1}{\pi}} \pi$	$\log_{\pi} \pi^3$

18.18. Розв'язати рівняння  $\cos(\cos x) = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$x = \pm \arccos(2\pi n) + 2\pi n, n \in Z$	$x = 2\pi n, n \in Z$	$x = \pm \pi + 2\pi n, n \in Z$

18.19. Розв'язати рівняння  $\sin x + \sin|x| = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pi n, n \in Z$	0	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 0] \cup \{\pi n, n \in Z\}$	$(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right\}$

18.20. Розв'язати рівняння  $|\cos x| = \cos x + 2\sin x$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = 2\pi n, n \in Z$	$x = \pi n, n \in Z$	$x = \pi n, x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in Z$	$x = \pi n, x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, n, k \in Z$	$x = 2\pi n, x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in Z$

18.21. За якого найменшого значення параметра  $a$  рівняння  $2\cos 4x = a - 5$  має корені?

А	Б	В	Г	Д
-3	0	3	1	-1

18.22. Знайти всі значення  $a$ , за яких рівняння  $(a+2)\sin x = a^2 - 4$  має корені.

А	Б	В	Г	Д
$a \in (1; 3)$	$a \in R$	$a \neq 2$	$a \in \{-2\} \cup [1; 3]$	$\emptyset$

Завдання 18.23–18.34 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

18.23. Установити відповідність між заданими рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків на проміжку  $[0; 2\pi]$  (А–Д).

1  $\sin 2x = 0$

А  $\{0; 2\pi\}$

2  $2 \cos x = 2$

Б  $\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\}$

3  $\cos 2x = 0$

В  $\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$

4  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = 1$

Г  $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Д  $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

18.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a, |a| \leq 1$

А  $\pm \arccos a + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

Б  $\arctg a + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

2  $\sin x \cos x = \frac{a}{2}$

В  $\operatorname{arccotg} a + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

3  $\sin x = a \cos x$

Г  $(-1)^n \arcsin a + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

4  $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = a$

Д  $(-1)^n \cdot \frac{1}{2} \arcsin a + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

18.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1  $2 \sin x = 1$

А  $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2  $\sin 2x = 1$

Б  $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

3  $\sin \frac{x}{2} = 1$

В  $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

4  $2 \sin \frac{x}{2} = 1$

Г  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Д  $x = (4n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$

18.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів на відріжку  $[0; 2\pi]$  (А–Д).

1  $\sin 2x = 0$

А Жодного

2  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

Б Один

3  $\sin \frac{x}{8} = 1$

В Два

4  $\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$

Г Чотири

Д П'ять

18.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів на проміжку  $(0; \pi)$  (А–Д).

1  $\operatorname{ctg} 3x = 4$

А Чотири

2  $\operatorname{ctg} 2x = 2$

Б Три

3  $\operatorname{ctg} \frac{x}{4} = 0$

В Два

4  $|\operatorname{ctg} 2x| = 1$

Г Один

Д Жодного

18.28. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1  $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$

А  $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2  $\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0$

Б  $x = \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$

3  $\cos^2 x - 5\cos x + 4 = 0$

В  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

4  $\cos^2 x - 4\cos x - 5 = 0$

Г  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Д  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

18.29. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та рівносильними їм рівняннями (А–Д).

1  $\cos 3x - \cos x = 0$

А  $\sin 2x \cos 3x = 0$

2  $\cos 3x + \cos x = 0$

Б  $\sin 3x \cos 2x = 0$

3  $\sin 3x - \sin x = 0$

В  $\sin x \cos x = 0$

4  $\sin 5x + \sin x = 0$

Г  $\sin x \cos 2x = 0$

Д  $\cos x \cos 2x = 0$

18.30. Установити відповідність між рівняннями (1-4) та їх коренями (А-Д).

1  $\sin \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} = 0$

А  $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2  $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0$

Б  $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

3  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$

В  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

4  $\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0$

Г  $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Д  $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

18.31. Установити відповідність між рівняннями (1-4) та рівносильними їм рівняннями (А-Д).

1  $\frac{\cos x}{\sin x - 2} = 0$

А  $\sin x = -1$

2  $\frac{\cos x}{\sin x - 1} = 0$

Б  $\sin x = 1$

3  $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$

В  $\cos x = 2$

4  $\frac{\sin x - 1}{\cos x} = 0$

Г  $\cos x = 0$

Д  $\cos x = -1$

18.32. Установити відповідність між рівняннями (1-4) та їх коренями (А-Д).

1  $\sin x^2 = 1$

А  $x = \sqrt{\frac{5\pi}{2} + 2\pi(n-1)}, n \in \mathbb{N}$

2  $\sin \sqrt{x} = 1$

Б  $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , де  $n$  — ціле невід'ємне число

3  $\sin^2 x = 1$

В  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

4  $\sin|x| = 1$

Г  $x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ , де  $n$  — ціле невід'ємне число

Д  $x = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^2$ , де  $n$  — ціле невід'ємне число

18.33. Установити відповідність між рівняннями (1-4) та їх коренями (А-Д).

1  $|\sin x| = -\sin x$

А  $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$

2  $|\sin x| = \sin x$

Б  $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$

3  $|\cos x| = -\cos x$

В  $x \in [\pi(2k+1); 2\pi(k+2)], k \in \mathbb{Z}$

4  $|\cos x| = \cos x$

Г  $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 4\pi k; \frac{3\pi}{2} + 4\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$

Д  $x \in [2\pi k; \pi(2k+1)], k \in \mathbb{Z}$



18.34. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1  $\sin(x - |x|) = 0$

А  $\{-\pi n, n \in \mathbb{N}\} \cup [0; +\infty)$

2  $\sin(x + |x|) = 0$

Б  $\{-2\pi n, n \in \mathbb{N}\} \cup [0; +\infty)$

3  $\cos(x + |x|) = 1$

В  $(-\infty; 0] \cup \left\{ \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

4  $\cos(x - |x|) = 1$

Г  $(-\infty; 0] \cup \{\pi n, n \in \mathbb{N}\}$

Д  $\left\{ -\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup [0; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 18.35–18.52. Відповідь запишіть десятковим дробом.

18.35. Розв'язати рівняння  $\sin(\pi \sin x) = -1$ . У відповідь записати кількість коренів на проміжку  $[0; \pi]$ .

18.36. Розв'язати рівняння  $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3} \cos x - \frac{4\pi}{3}\right) = 1$ . У відповідь записати найменший додатний корінь, округлений з точністю до 0,1.

18.37. Знайти кількість коренів рівняння  $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3 \sin x$  на проміжку  $(0; \pi)$ .

18.38. Розв'язати рівняння  $3 \sin x - 2 \cos^2 x = -3$ . У відповідь записати кількість коренів на проміжку  $[0; \pi]$ .

18.39. Розв'язати рівняння  $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ . У відповідь записати кількість коренів на проміжку  $[0; \pi]$ .

18.40. Розв'язати рівняння  $\sqrt{1 - \sin x} = \cos x$ . У відповідь записати значення  $\frac{x_0}{\pi}$ , де  $x_0$  — найменший додатний корінь рівняння.

18.41. Розв'язати рівняння  $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$ . У відповідь записати кількість коренів на проміжку  $[0; \pi]$ .

18.42. Розв'язати рівняння  $\cos x = \sin 3x$ . У відповідь записати значення  $\frac{x_0}{\pi}$ , де  $x_0$  — найменший додатний корінь рівняння.

18.43. Розв'язати рівняння  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2$ . У відповідь записати значення  $\frac{3x_0}{\pi}$ , де  $x_0$  — найменший додатний корінь рівняння.

18.44. Розв'язати рівняння  $\sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$ . У відповідь записати кількість коренів на проміжку  $[0; 2\pi]$ .

18.45. Розв'язати рівняння  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$ . У відповідь записати кількість коренів на проміжку  $[0; 2\pi]$ .

- 18.46. Розв'язати рівняння  $(\sin x + \cos x)^2 - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$ . У відповідь записати кількість коренів на проміжку  $[0; 2\pi]$ .
- 18.47. Нехай  $x_0$  — найменший додатний корінь рівняння  $\cos^2 x - 5\sin x \cos x + 2 = 0$ . Знайти  $\operatorname{tg} x_0$ .
- 18.48. За яких значень параметра  $a$  рівняння  $\sin^4 x + \cos^4 x = a$  має розв'язки? У відповідь записати суму найбільшого та найменшого значень  $a$ .
- 18.49. Розв'язати рівняння  $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^2 4x + \frac{1}{4}$ . У відповідь записати значення  $\frac{4x_0}{\pi}$ , де  $x_0$  — найменший додатний корінь рівняння.
- 18.50. Розв'язати рівняння  $9(\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x) = 15(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 + 2$ . У відповідь записати кількість коренів на проміжку  $[0; 2\pi]$ .
- 18.51. Розв'язати рівняння  $\arccos(\sin x) = \frac{x}{2}$ . У відповідь записати значення  $\frac{S}{\pi}$ , де  $S$  — сума всіх коренів рівняння.
- 18.52. Розв'язати рівняння  $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = a$ . У відповідь записати найбільше значення  $a$ , за якого рівняння має корені.

## ТЕМА 19. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

Нерівності, які містять змінну під знаком тригонометричної функції, називають *тригонометричними*. Наприклад,  $\cos x \leq \frac{1}{3}$ ;  $5 \sin^2 x + 3 \cos x > 6$  тощо. Розв'язування тригонометричних нерівностей зводять до розв'язування *найпростіших тригонометричних нерівностей*, розв'язки яких подано в таблицях:

$\sin x > a, \quad  a  \leq 1$
$x \in (\arcsin a + 2\pi k; \pi - \arcsin a + 2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z}$
$\sin x < a, \quad  a  \leq 1$
$x \in (\pi - \arcsin a + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi(k+1)), \quad k \in \mathbf{Z}$
$\cos x > a, \quad  a  \leq 1$
$x \in (-\arccos a + 2\pi k; \arccos a + 2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z}$
$\cos x < a, \quad  a  \leq 1$
$x \in (\arccos a + 2\pi k; -\arccos a + 2\pi(k+1)), \quad k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} x > a$
$x \in \left( \operatorname{arctg} a + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), \quad k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} x < a$
$x \in \left( -\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} a + \pi k \right), \quad k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} x > a$
$x \in (\pi k; \operatorname{arctg} a + \pi k), \quad k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} x < a$
$x \in (\operatorname{arctg} a + \pi k; \pi(k+1)), \quad k \in \mathbf{Z}$

**Приклад 1.** Розв'язати нерівність  $\sin 3x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\blacksquare \quad 3x \in \left[ \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k; \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k \right], \quad k \in \mathbf{Z}; \quad 3x \in \left[ \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right], \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$3x \in \left[ \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right], \quad k \in \mathbf{Z}; \quad x \in \left[ \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \right], \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Відповідь. } x \in \left[ \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \right], \quad k \in \mathbf{Z}. \quad \blacksquare$$

Завдання 19.1–19.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

19.1. Розв'язати нерівність  $2 \sin 2x > -\sqrt{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right),$ $k \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right),$ $k \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right),$ $k \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{8} + 2\pi k; \frac{5\pi}{8} + 2\pi k\right),$ $k \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{5\pi}{8} + \pi k\right),$ $k \in Z$

19.2. Знайти довжину кожного з відрізків координатної прямої, які утворюють розв'язки нерівності  $2 \sin x \leq 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{6\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$

19.3. Розв'язати нерівність  $\cos \pi x > \frac{1}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right),$ $k \in Z$	$\left(-\frac{1}{8} + 2k; \frac{1}{6} + 2k\right),$ $k \in Z$	$\left(\frac{1}{3} + 2k; \frac{7}{3} + 2k\right),$ $k \in Z$	$\left(-\frac{1}{3} + k; \frac{1}{3} + k\right),$ $k \in Z$	$\left(-\frac{1}{3} + 2k; \frac{1}{3} + 2k\right),$ $k \in Z$

19.4. Знайти довжину кожного з відрізків координатної прямої, які утворюють розв'язки нерівності  $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$

19.5. Розв'язати нерівність  $\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$ $n \in Z$	$\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$ $n \in Z$	$\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$ $n \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right),$ $n \in Z$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right),$ $n \in Z$

19.6. Серед наведених нерівностей вибрати ту, яка не має розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x < -\frac{3}{4}$	$\sin x \geq 0,2$	$\arctg x \geq 2$	$\operatorname{tg} x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\arctg x \leq 1,2$

19.7. Серед наведених нерівностей вибрати ту, яка має розв'язки.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x \geq \frac{3}{2}$	$\cos x < -1$	$\sin x > 1$	$\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$	$\arcsin x \leq -\pi$

19.8. Розв'язати нерівність  $\cos 5x \cos x - \sin 5x \sin x < -\frac{1}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{2}{3}\pi + 2\pi n; \frac{4}{3}\pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{6}\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{3}\pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(-\frac{4}{3}\pi + 2\pi n; \frac{2}{3}\pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}; \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(-\frac{2}{9}\pi + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$

19.9. Розв'язати нерівність  $\sin^2 x > \frac{1}{4}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5}{6}\pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6}\pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7}{6}\pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5}{6}\pi + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

19.10. Розв'язати нерівність  $\cos^2 x \leq \frac{1}{4}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left[-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$	$\left[\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$	$\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$	$\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{2}{3}\pi + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

19.11. Розв'язати нерівність  $(2 \sin x - 3) \operatorname{tg} x \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$	$\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$	$\emptyset$	$\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

19.12. Розв'язати нерівність  $\sin x < \cos x$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(-\frac{3}{4}\pi + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{3}{4}\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$	$(-\pi + 2\pi n; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5}{4}\pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

19.13. Розв'язати нерівність  $\sin x - \cos x > 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3}{4} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{3}{4}\pi + \pi k; \frac{9}{4}\pi + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$	$\left(\pi + 2\pi k; \frac{5}{2}\pi + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

19.14. Розв'язати нерівність  $\sqrt{\sin x} \geq \sqrt{\cos x}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5}{4}\pi + 2\pi k\right]$ , $k \in \mathbb{Z}$	$\left[2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ , $k \in \mathbb{Z}$	$\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$	$\emptyset$	$\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ , $k \in \mathbb{Z}$

19.15. Розв'язати нерівність  $|\sin x| < \frac{1}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{5}{6}\pi + \pi k\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$	$\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5}{6}\pi + 2\pi k\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$	$\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{7}{6}\pi + \pi k\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$

19.16. Розв'язати нерівність  $|\cos x| > \frac{1}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{2}{3}\pi + \pi k\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{5}{6}\pi + \pi k\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$	$\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$	$\left(-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$

19.17. Розв'язати нерівність  $\arccos x \leq \frac{1}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left[\cos \frac{1}{2}; 1\right]$	$\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$	$\left[-1; \cos \frac{1}{2}\right]$	$\left(\cos \frac{1}{2}; 1\right)$	$\left(-1; \cos \frac{1}{2}\right)$

19.18. Розв'язати нерівність  $0 < \arcsin x \leq \frac{\pi}{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(0; \frac{1}{2}\right]$	$\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	$\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$	$\left[0; \frac{1}{2}\right)$

19.19. Розв'язати нерівність  $\operatorname{arctg} x \geq \frac{\pi}{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; \sqrt{3}]$	$\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$	$[1; +\infty)$	$[\sqrt{3}; +\infty)$	$(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{3}]$

19.20. Розв'язати нерівність  $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\sqrt{3}; 1]$	$\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$	$(-1; \sqrt{3}]$	$[-\sqrt{3}; 1)$	$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$

Завдання 19.21–19.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

19.21. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–4) та їх найбільшими розв'язками на проміжку  $[0; 2\pi]$  (А–Д).

1  $\cos x \leq -\frac{1}{2}$

А  $\frac{5\pi}{6}$

2  $\sin x \geq \frac{1}{2}$

Б  $\frac{3\pi}{4}$

3  $\operatorname{tg} x \leq 1$

В  $2\pi$

4  $\operatorname{ctg} x \geq -1$ .

Г  $\frac{7\pi}{4}$

Д  $\frac{4\pi}{3}$

19.22. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–4) та їх найменшими розв'язками на проміжку  $[0; \pi]$  (А–Д).

1  $\cos^2 x - \sin^2 x < 2$

А  $\frac{\pi}{8}$

2  $\sin 2x \geq 1$

Б  $\frac{\pi}{2}$

3  $\operatorname{ctg} 2x \leq 1$

В  $\frac{\pi}{4}$

4  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x \geq 1$

Г 0

Д  $\pi$

19.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1  $\sin \frac{x}{2} > \frac{1}{2}$

А  $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2  $\sin \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Б  $\frac{\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$

3  $\sin \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

В  $\frac{3\pi}{2} + 4\pi n < x < \frac{9\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$

4  $\sin \frac{x}{2} < -2$

Г  $\frac{\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Д  $\emptyset$

19.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1  $\cos 2x > \frac{1}{2}$

2  $\cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3  $\cos 2x > -\frac{1}{2}$

4  $\cos 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

А  $-\frac{3\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Б  $\frac{3\pi}{8} + \pi n < x < \frac{5\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

В  $\frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{11\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Г  $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Д  $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

19.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1  $\operatorname{tg} 4x > 1$

2  $\operatorname{tg} 4x < -\sqrt{3}$

3  $\operatorname{tg} 4x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$

4  $\operatorname{tg} 4x < \sqrt{3}$

А  $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$

Б  $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$

В  $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} < x < -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$

Г  $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$

Д  $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$

19.26. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1  $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} > \sqrt{3}$

2  $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$

3  $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} > -1$

4  $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} < -\sqrt{3}$

А  $\frac{\pi}{2} + 3\pi n < x < 3\pi(n+1), n \in \mathbb{Z}$

Б  $3\pi n < x < \frac{9\pi}{4} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$

В  $3\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Г  $\pi(3n+1) < x < 3\pi(n+1), n \in \mathbb{Z}$

Д  $\frac{5\pi}{2} + 3\pi n < x < 3\pi(n+1), n \in \mathbb{Z}$

19.27. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1  $\cos^2 x - \sin^2 x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2  $\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3  $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x < -\frac{1}{2}$

4  $\sin^2 x > \frac{1}{4}$

А  $\frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Б  $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

В  $-\frac{3\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Г  $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

Д  $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$



**Розв'яжіть завдання 19.28–19.33. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

**19.28.** Розв'язати нерівність  $\sin\left(\frac{3}{4}x + \frac{\pi}{9}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . У відповідь записати найменший додатний цілий розв'язок нерівності.

**19.29.** Розв'язати нерівність  $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 < 0$ . У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності на проміжку  $[0; 2\pi]$ .

**19.30.** Розв'язати нерівність  $\cos 2x + \cos x \geq 0$ . У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності на проміжку  $[0; 2\pi]$ .

**19.31.** Розв'язати нерівність  $2\sin^4 2x \geq \sin^2 2x$ . У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності на проміжку  $[0; 2\pi]$ .

**19.32.** Розв'язати нерівність  $\sqrt{3}\sin x + \cos x < 1$ . У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності на проміжку  $[0; 2\pi]$ .

**19.33.** Розв'язати нерівність  $\arcsin \frac{1}{x} + \arccos \frac{1}{x} < 2$ . У відповідь записати найменший додатний розв'язок нерівності.

## ТЕМА 2. ВІДСОТКИ

Відсотком (процентом) називають число одну соту. Отже,  $\frac{1}{100} = 1\%$ .

100% числа  $a$  дорівнюють  $a$ , 50% числа  $a$  дорівнюють  $\frac{1}{2}a$ , 25% числа  $a$  становлять  $\frac{1}{4}a$ .

**Знаходження відсотків від числа.**

**Приклад 1.** Зарплата водія становить 1700 грн. Авансом йому виплатили 60% зарплати. Яку суму отримав водій?

■ 1700 грн. — 100%;  
x грн. — 60%.

Складаємо пропорцію:  $\frac{1700}{x} = \frac{100}{60}$ . Тоді  $x = \frac{1700 \cdot 60}{100}$ ;  $x = 1020$ .

Отже, водій отримав 1020 грн. ■

**Знаходження числа за його відсотками.**

**Приклад 2.** Робітничі виплатили авансом 570 грн., що становить 25% його зарплати. Яка заробітна плата у робітника?

■ 570 грн. — 25%;  
x грн. — 100%.

Складаємо пропорцію:  $\frac{570}{x} = \frac{25}{100}$ . Тоді  $x = \frac{570 \cdot 100}{25}$ ;  $x = 2280$ .

Отже, зарплата робітника 2280 грн. ■

**Знаходження відсоткового відношення двох чисел.**

**Приклад 3.** Сторожу із зарплати 800 грн. виплатили авансом 520 грн. Який відсоток зарплати він отримав?

■ 800 грн. — 100%;  
520 грн. — x%.

Складаємо пропорцію:  $\frac{800}{520} = \frac{100}{x}$ . Тоді  $x = \frac{520 \cdot 100}{800}$ ;  $x = 65$ .

Отже, сторож отримав 65% зарплати. ■

**Формули простих і складних відсотків.**

Якщо банк виплачує клієнтові щомісячно  $p\%$  внесеної суми  $A_0$ , то на рахунок клієнта через  $n$  місяців буде сума:

$$A_n = A_0 \left( 1 + \frac{pn}{100} \right). \text{ Це формула простих відсотків.}$$

Якщо клієнт поклав у банк суму  $A_0$  під  $p\%$  річних, то через  $n$  років нагромаджений (накопичений) капітал становитиме:

$$A_n = A_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n. \text{ Це формула складних відсотків.}$$

**Приклад 4.** Якою має бути початкова сума, покладена в банк під 20% річних, щоб через два роки прибуток становив 22000 грн.?

■ Нехай початкова сума становить  $A_0$  грн. Тоді через два роки на рахунок буде  $A_2 = A_0 \cdot (1 + 0,2)^2 = A_0 \cdot 1,44$  (грн.). Прибуток дорівнює різниці нарощеного ( $A_2$ ) та початкового ( $A_0$ ) капіталу:  $A_2 - A_0 = A_0 \cdot 1,44 - A_0 = A_0 \cdot 0,44 = 22000$ . Тоді  $A_0 = \frac{22000}{0,44} = 50000$  (грн.).

Відповідь. 50000 грн. ■

**Приклад 5.** Скільки сухої ромашки вийде із 50 кг свіжої, якщо при сушінні вона втрачає 84% своєї маси?

А	Б	В	Г	Д
34 кг	312,5 кг	60 кг	42 кг	8 кг

- 1)  $84\% = 0,84$ ;  
 2)  $0,84 \cdot 50 = 42$  (кг) — втрачає ромашка при сушінні;  
 3)  $50 - 42 = 8$  (кг) — залишиться сухої ромашки.

Відповідь. Д. ■

**Приклад 6.** Товар був виставлений на продаж за 4000 грн. Після двох знижок на одну й ту ж кількість відсотків він був проданий за 2250 грн. Визначити, на скільки відсотків щоразу знижували ціну.

■ Нехай ціну знижували на  $x\% = \frac{x}{100}$ . Тоді першого разу ціну знизили на  $4000 \cdot \frac{x}{100} = 40x$  (грн.), і товар став коштувати  $(4000 - 40x)$  грн. Другого разу ціну знизили на  $(4000 - 40x) \cdot \frac{x}{100} = 40x - \frac{2}{5}x^2$  (грн.), і товар став коштувати  $4000 - 40x - (40x - \frac{2}{5}x^2) = 4000 - 80x + \frac{2}{5}x^2$  (грн.) — що, за умовою, становить 2250 грн. Маємо рівняння:  $4000 - 80x + \frac{2}{5}x^2 = 2250$ ;  $\frac{2}{5}x^2 - 80x + 1750 = 0$ ;  $\frac{1}{5}x^2 - 40x + 875 = 0$ ;  $x^2 - 200x + 4375 = 0$ ;  $x_1 = 25$ ,  $x_2 = 175$  — не підходить, бо зменшувати ціну можна не більше ніж на 100%. Отже,  $x = 25$ .

Відповідь. 25. ■

**Завдання 2.1–2.23** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**2.1.** Як знайти 52% від числа 960?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{960 \cdot 100}{52}$	$\frac{52 \cdot 100}{96}$	$\frac{960 \cdot 52}{100}$	$960 : 52$	$960 \cdot 52$

2.2. Як знайти число, 60 % якого дорівнюють 360?

А	Б	В	Г	Д
$360 \cdot 60$	$\frac{360}{60}$	$\frac{60 \cdot 100}{360}$	$\frac{360 \cdot 60}{100}$	$\frac{360 \cdot 100}{60}$

2.3. Як встановити, скільки відсотків становить число 9 від 96?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{9 \cdot 100}{96}$	$\frac{96 \cdot 9}{100}$	$\frac{96 \cdot 100}{9}$	$\frac{9}{96}$	$\frac{96}{9}$

2.4. Банк сплачує своїм вкладникам 8% річних. Визначити, скільки грошей потрібно внести на рахунок, щоб через рік отримати 60 грн. прибутку.

А	Б	В	Г	Д
1150 грн.	1050 грн.	950 грн.	850 грн.	750 грн.

2.5. Уміст олова у сплаві становить 40%. Скільки грамів олова у 300 г такого ж сплаву?

А	Б	В	Г	Д
$133\frac{1}{3}$ г	120 г	75 г	$13\frac{1}{3}$ г	240 г

2.6. Сплав містить 50 г олова і 200 г міді. Який відсотковий уміст олова у сплаві?

А	Б	В	Г	Д
24%	40%	20%	25%	50%

2.7. Вкладник вніс до банку 2000 грн., а через рік отримав 2160 грн. Під який відсоток річних були покладені гроші?

А	Б	В	Г	Д
12%	8%	6%	14%	16%

2.8. 10%-й розчин солі містить 180 г води. Яка маса цього розчину?

А	Б	В	Г	Д
198 г	190 г	1800 г	200 г	400 г

2.9. Ціна товару дорівнює 64 грн. Після зниження ціни товар коштував 56 грн. На скільки відсотків було знижено ціну?

А	Б	В	Г	Д
25%	8%	10%	$14\frac{2}{7}\%$	12,5%

2.10. Скільки відсотків від 180 становлять 15% від 300?

А	Б	В	Г	Д
15%	20%	25%	30%	40%

2.11. Сплав, маса якого дорівнює 320 кг, містить 20% олова, 144 кг свинцю і решту — домішки. Визначити відсотковий уміст домішок.

А	Б	В	Г	Д
80%	25%	35%	55%	48,75%

2.12. Скільки відсотків становить НСД(99; 126) від НСК(12; 20)?

А	Б	В	Г	Д
25%	20%	15%	10%	30%

2.13. Ціна товару була підвищена на 25%. На скільки відсотків необхідно зменшити нову ціну товару, щоб одержати початкову?

А	Б	В	Г	Д
25%	15%	35%	20%	10%

2.14. Власник клубу має стабільний прибуток. Щоб збільшити прибуток, він підвищив ціну на квитки на 25%. Кількість відвідувачів значно зменшилася, і він вимушений був повернутися до початкової ціни квитка. На скільки відсотків власник клубу зменшив ціну квитка?

А	Б	В	Г	Д
125%	100%	25%	20%	Інша відповідь

2.15. Деяке додатне число спочатку збільшили на 50%, а потім одержане число зменшили на 50%. Як змінилося початкове число?

А	Б	В	Г	Д
Не змінилося	Зменшилося на 25%	Зменшилося на 20%	Зменшилося на 5%	Збільшилося на 5%

2.16. На скільки відсотків збільшиться об'єм куба, якщо його ребро збільшити на 50%?

А	Б	В	Г	Д
237,5%	125%	150%	50%	337,5%

2.17. Вкладник вніс до банку 1000 грн. під 8% річних. Яку суму він матиме на рахунку через 3 роки?

А	Б	В	Г	Д
$3 \cdot 1000 \cdot 1,08$	$3 \cdot 1000 \cdot 0,08$	$1000 \cdot 0,08^2$	$1000 \cdot 0,08^3$	$1000 \cdot 1,08^3$

2.18. Число  $a$  становить 25% числа  $b$ . Скільки відсотків становить число  $b$  від числа  $a$ ?

А	Б	В	Г	Д
400%	200%	250%	750%	500%

2.19. Товар подешевшав на 20%. На скільки відсотків більше можна купити товару за ту ж кількість грошей?

А	Б	В	Г	Д
25%	20%	10%	40%	5%

2.20. Тривалість робочого дня зменшилась з 8 год до 6 год. На скільки відсотків потрібно підвищити продуктивність праці, щоб випуск продукції залишився тим же?

А	Б	В	Г	Д
20%	25%	$33\frac{1}{3}\%$	35%	$24\frac{1}{3}\%$

2.21. Машиніст провів поїзд за 7 год 30 хв замість 9 год за графіком. На скільки відсотків було збільшено середню швидкість?

А	Б	В	Г	Д
20%	$16\frac{2}{3}\%$	25%	15%	30%

2.22. У сплаві міді та цинку мідь становить  $\frac{1}{7}$  частину маси цинку. Який відсотковий уміст міді у сплаві?

А	Б	В	Г	Д
$14\frac{2}{7}\%$	12,5%	25%	45%	6,2%

2.23. 2 кг сплаву міді з оловом містить 40% міді. Скільки потрібно додати до цього сплаву олова, щоб отриманий сплав містив 16% міді?





А	Б	В	Г	Д
3 кг	2,5 кг	2 кг	4 кг	3,5 кг

Завдання 2.24–2.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

2.24. Установити відповідність між частинами (1–4) та відсотками (А–Д).

1	$\frac{1}{4}$	А 40%
2	$\frac{2}{5}$	Б 20%
3	$\frac{1}{8}$	В 80%
4	$\frac{4}{5}$	Г 12,5%
		Д 25%

2.25. Установити відповідність між затушованими частинами круга (1–4) та відсотками (А–Д), які вони становлять від круга.

1		А $62\frac{1}{2}\%$
2		Б $58\frac{1}{3}\%$
3		В $83\frac{1}{3}\%$
4		Г 75%
		Д $66\frac{2}{3}\%$

**2.26.** Установити відповідність між задачами (1–4) та їх розв’язаннями (А–Д).

- |   |                                  |
|---|----------------------------------|
| 1 Скільки відсотків становить число 40 від числа 240? | А $\frac{240 \cdot 40\%}{100\%}$ |
| 2 Знайти 40% від числа 240.                           | Б $\frac{240 \cdot 40\%}{100}$   |
| 3 Знайти число, 40% якого дорівнюють 240.             | В $\frac{240 \cdot 100\%}{40}$   |
| 4 Скільки відсотків становить число 240 від числа 40? | Г $\frac{240 \cdot 100\%}{40\%}$ |
|   | Д $\frac{40 \cdot 100\%}{240}$   |

**2.27.** Кількість дівчат у класі становить  $\frac{1}{4}$  кількості хлопців. Установити відповідність між задачами (1–4) та відповідями (А–Д) до них.

- |   |        |
|---|--------|
| 1 Скільки відсотків хлопців у класі?                                  | А 20%  |
| 2 Скільки відсотків дівчат у класі?                                   | Б 75%  |
| 3 Знайти відсоткове відношення кількості дівчат до кількості хлопців. | В 25%  |
| 4 Знайти відсоткове відношення кількості хлопців до кількості дівчат. | Г 80%  |
|   | Д 400% |

**2.28.** Установити відповідність між задачами (1–4) та відповідями (А–Д) до них.

- |   |          |
|---|----------|
| 1 Вкладник вніс до банку 11000 грн. під 13% річних. Скільки гривень становитиме прибуток через рік?   | А 12320  |
|   | Б 1382,4 |
|   | В 1340   |
| 2 Вкладник вніс до банку 11000 грн. під 12% річних. Скільки гривень буде на його рахунку через рік?   | Г 1430   |
|   | Д 1440   |
| 3 Вкладник вніс до банку 4000 грн. під 16% річних. Скільки гривень становитиме прибуток через 2 роки? |          |
| 4 Вкладник вніс до банку 1000 грн. під 20% річних. Скільки гривень буде на його рахунку через 2 роки? |          |

**Розв’яжіть завдання 2.29–2.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

- 2.29.** 2 кг сплаву міді з оловом містить 40% міді. Скільки кілограмів олова потрібно додати до цього сплаву, щоб отриманий сплав містив 25% міді?
- 2.30.** Скільки кілограмів води потрібно випарувати зі 100 кг 10%-го розчину солі, щоб одержати розчин з концентрацією 20%?
- 2.31.** Сплав міді та цинку, маса якого дорівнює 6 кг, містить 45% міді. Скільки кілограмів міді потрібно додати до цього сплаву, щоб він містив 60% міді?

- 2.32. З молока одержують 21% вершків, а з вершків — 24% масла. Зі скількох тонн молока можна одержати 126 кг масла?
- 2.33. Змішали 2 л молока, жирність якого дорівнює 6%, і 3 л молока, жирність якого дорівнює 8%. Знайди у відсотках жирність утвореної суміші.
- 2.34. Щоб одержати 800 г 50%-го розчину азотної кислоти, слід змішати 60%-й розчин цієї кислоти з 20%-м розчином. Скільки грамів 20% розчину використали?
- 2.35. До 400 г 5%-го розчину солі додали солі й одержали 24%-й розчин. Яка маса утвореного розчину у грамах?
- 2.36. Порода містить 32% мінералу, в якому є 4,5% золота. Який відсоток золота в породі?
- 2.37. Вкладник вніс до банку 9000 грн. Частина грошей він поклав під 10% річних, а решту — під 8%. Через рік прибутки від обох вкладів були однаковими. Скільки тисч гривень було покладено на перший рахунок?
- 2.38. Скільки тисяч гривень було покладено в банк, якщо через два роки прибуток становив 840 грн. за 10% річних?
- 2.39. Встановити, який відсоток річних нараховує банк, якщо через два роки за початкового вкладу 800 грн. на рахунку стає 882 грн.
- 2.40. Ціна вхідного квитка в кінотеатр становить 36 грн. Після зменшення вхідної плати кількість глядачів збільшилися на 50%, а виручка — на 25%. Скільки гривень став коштувати квиток?



## ТЕМА 20. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Якщо завдання полягає у відшуванні спільних розв'язків кількох рівнянь, то кажуть, що треба розв'язати *систему рівнянь*. Наприклад, 
$$\begin{cases} 5x - 2y = 3; \\ x + y = 15 \end{cases}$$
 — система двох лінійних

рівнянь із двома невідомими. Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх нема. Дві системи рівнянь називають *рівносильними*, якщо множини їх розв'язків збігаються.

- Якщо рівняння (одне, кілька або всі) системи замінити рівносильним йому рівнянням, то отримаємо систему рівносильну даній.
- Якщо одне рівняння системи замінити його почастиною сумою з іншим, то отримаємо систему, рівносильну даній.

Системи двох лінійних рівнянь із двома невідомими, наприклад,  $x$ ,  $y$ , розв'язують методом підстановки або методом додавання.

**Метод підстановки** полягає в тому, що одне з рівнянь подають у вигляді  $y = f(x)$  або  $x = g(y)$  (виражають одну змінну через іншу) і підставляють в інше рівняння замість змінної отриманий вираз. У результаті такої підстановки отримують рівняння з однією змінною. Розв'язавши його, підставляють отриманий корінь в інше рівняння системи і визначають значення іншої змінної. Суть **методу додавання** полягає в тому, що рівняння системи домножують на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами. Тоді, почастиною додавши ці рівняння, отримують алгебраїчне рівняння з однією змінною і т. д.

**Приклад 1.** Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} 2x - y = 7; \\ -3x + 4y = -8. \end{cases}$$

■ **Метод підстановки.** З першого рівняння отримуємо:  $y = 2x - 7$ . Підставивши замість  $y$  в друге рівняння вираз  $2x - 7$ , отримаємо:  $-3x + 4(2x - 7) = -8$ ;  $5x = 20$ ;  $x = 4$ .

Тоді  $y = 2 \cdot 4 - 7 = 1$ . Розв'язок системи рівнянь:  $(4; 1)$ .

**Метод додавання.** Домножимо перше рівняння на 4: 
$$\begin{cases} 2x - y = 7; & | \times 4 \\ -3x + 4y = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} 8x - 4y = 28; \\ -3x + 4y = -8. \end{cases}$$

Додавши почастиною рівняння, отримаємо:  $5x = 20$ ;  $x = 4$ . Підставивши це значення в одне із рівнянь заданої системи, наприклад, у перше, отримаємо:  $2 \cdot 4 - y = 7$ . Тоді  $y = 1$ .

Відповідь.  $(4; 1)$ . ■

**Приклад 2.** Нехай  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи  $\begin{cases} \sqrt{25-10x+x^2} + y = 4; \\ y-3x+11=0. \end{cases}$  Знайти добуток  $x_0 \cdot y_0$ .

■ Спочатку розв'яжемо систему рівнянь:  $\begin{cases} \sqrt{25-10x+x^2} + y = 4, \\ y-3x+11=0; \end{cases}$   $\begin{cases} \sqrt{(x-5)^2} + y = 4, \\ y = 3x-11; \end{cases}$

$\begin{cases} |x-5|+3x-11=4, \\ y=3x-11; \end{cases}$   $\begin{cases} |x-5|+3x=15, \\ y=3x-11. \end{cases}$  1. Нехай  $x-5 \geq 0$ , тобто  $x \geq 5$ .  $\begin{cases} x-5+3x=15, \\ y=3x-11; \end{cases}$

$\begin{cases} 4x=20, \\ y=3x-11; \end{cases}$   $\begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases}$  2. Нехай  $x-5 < 0$ , тобто  $x < 5$ .  $\begin{cases} -x+5+3x=15, \\ y=3x-11; \end{cases}$   $\begin{cases} 2x=10, \\ y=3x-11; \end{cases}$   $x=5$  —

не підходить. Отже,  $x_0 = 5, y_0 = 4$ . Тоді  $x_0 \cdot y_0 = 5 \cdot 4 = 20$ .

Відповідь. 20. ■

**Приклад 3.** Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75; \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
(1; 2)	(3; 5)	(2; 1)	Інша відповідь	(2; 3)

■  $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75; \\ 3^y \cdot 5^x = 45; \end{cases}$   $\begin{cases} \frac{3^x \cdot 5^y}{3^y \cdot 5^x} = \frac{75}{45}; \\ 3^x \cdot 5^y \cdot 3^y \cdot 5^x = 75 \cdot 45; \end{cases}$   $\begin{cases} 3^{x-y} \cdot 5^{y-x} = \frac{75}{45}; \\ 3^{x+y} \cdot 5^{x+y} = 5 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 15; \end{cases}$   $\begin{cases} 3^{x-y} \cdot \frac{1}{5^{x-y}} = \frac{5}{3}; \\ 15^{x+y} = 15^3; \end{cases}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-y} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$ ;  $\begin{cases} x-y = -1; \\ x+y = 3; \end{cases}$   $2x = 2; x = 1, y = 2$ .

Відповідь. А. ■

**Завдання 20.1–20.23** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**20.1.** Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} x+3y=14; \\ 2y-x=6 \end{cases}$  і знайти добуток компонентів розв'язку.

А	Б	В	Г	Д
16	20	8	$1\frac{1}{5}$	$13\frac{1}{3}$

**20.2.** Дано систему рівнянь  $\begin{cases} x+y=3; \\ 2x-3y=-4. \end{cases}$  Яке утвориться рівняння, якщо з першого рівняння виразити змінну  $y$  через  $x$ , і отриманий вираз підставити у друге рівняння замість  $y$ ?

А	Б	В	Г	Д
$5x+3=-4$	$3x-9=-4$	$5x-3=-4$	$5x+9=-4$	$5x-9=-4$

20.3. Знайти суму компонентів  $x_0 + y_0 + z_0$  розв'язку системи рівнянь 
$$\begin{cases} x + y = -2; \\ y + z = -11; \\ x + z = 1. \end{cases}$$

А	Б	В	Г	Д
-6	-12	-18	-24	-3

20.4. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} 3x + 4y = -20, \\ 5x + 2y = -10. \end{cases}$$

А	Б	В	Г	Д
(3; 4)	(0; -5)	(7; 9)	(2; -4)	(1; -7,5)

20.5. Знайти середнє арифметичне для значень чисел  $x$  та  $y$ , які є розв'язками системи рівнянь 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7; \\ -x + 3y = 16. \end{cases}$$

А	Б	В	Г	Д
3	2	1	4	3,5

20.6. Знайти компонент  $x_0$  розв'язку  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 4; \\ \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 9. \end{cases}$$

А	Б	В	Г	Д
3	$\frac{1}{3}$	147	91	$1\frac{6}{7}$

20.7. Скільки розв'язків має система рівнянь 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5; \\ x^2 - 2y^2 = -7? \end{cases}$$

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

20.8. Скільки розв'язків має система рівнянь 
$$\begin{cases} |x-3| - y = 0; \\ xy - 4 = 0? \end{cases}$$

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

20.9. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} x - y = 16; \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{cases}$$
 і вказати добуток компонентів її розв'язку.

А	Б	В	Г	Д
34	128	64	15	225

20.10. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} 3^{x+y} = 27; \\ 4^{x-y} = 0,25 \end{cases}$  і вказати компонент  $x_0$  її розв'язку  $(x_0; y_0)$ .

А	Б	В	Г	Д
0	-1	1	2	-2

20.11. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} \lg(x+y) = 2; \\ \lg(x-y) = 1 \end{cases}$  і вказати компонент  $y_0$  її розв'язку  $(x_0; y_0)$ .

А	Б	В	Г	Д
35	110	90	55	45

20.12. Знайти суму компонентів розв'язку системи рівнянь  $\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 2; \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
-3	3	$\sqrt{7}$	9	7

20.13. Яка з наведених систем за будь-яких значень  $p$  має єдиний розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} 2y = x; \\ y = \frac{x}{2} + p \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 3; \\ x + 2y = p \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y = 5; \\ 2x - 4y = p \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3; \\ x - y = p \end{cases}$	$\begin{cases} x - 3y = 5; \\ 6y - 2x = p \end{cases}$

20.14. За якого значення  $a$  система рівнянь  $\begin{cases} 2x - y = 5; \\ x + ay = 2 \end{cases}$  не має розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
0,5	-0,5	-1	2,5	10

20.15. За якого значення  $a$  система рівнянь  $\begin{cases} 3x + y = -15; \\ -x - ay = 5 \end{cases}$  має безліч розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	3	-3	-1

20.16. За яких значень  $a$  і  $b$  система рівнянь  $\begin{cases} 6x + by = 5a; \\ 5ax - 6y = b \end{cases}$  має розв'язок  $(-1; 2)$ ?

А	Б	В	Г	Д
$a = 2, b = 2$	$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$	$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$	$a = -2, b = -2$	$a = -1, b = 2$

20.17. Скільки розв'язків системи рівнянь  $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4; \\ x^2 + xy = 4 \end{cases}$  містять нульовий компонент?

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

20.18. Знайти  $|x - y|$ , якщо  $\begin{cases} x^2 - xy = 79, \\ y^2 - xy = 2. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
8	9	$\sqrt{77}$	7	81

20.19. Скільки розв'язків має система рівнянь  $\begin{cases} |x| - |y| = 0; \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	більше, ніж три	жодного

20.20. За якого значення  $a$  система рівнянь  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ x - y = a \end{cases}$  має єдиний розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
$a = 3$	$a = 2\sqrt{3}$	$a = -2\sqrt{2}$ або $a = 2\sqrt{2}$	$a = -2\sqrt{3}$ або $a = 2\sqrt{3}$	$a = -\sqrt{2}$ або $a = \sqrt{2}$

20.21. Скільки розв'язків має система рівнянь  $\begin{cases} xy = 6; \\ yz = 8; \\ zx = 12? \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

20.22. За якого значення  $k$  пряма  $y = kx + 2$  проходить через точку перетину прямих  $x + y = 5$  і  $x - y = 1$ ?

А	Б	В	Г	Д
-2	-1	0	1	2

20.23. За якого значення  $a$  система рівнянь  $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1\frac{1}{2}; \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}; \\ ax + y = 13 \end{cases}$  має розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
-2	-3	4	5	6

Завдання 20.24–20.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

20.24. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та кількістю їх розв'язків (А–Д).

- |   |  |           |
|---|--|-----------|
| 1 | $\begin{cases} x + 2y = 4; \\ 1,5x + 3y = 6 \end{cases}$ | А Жодного |
|   |  | Б Один    |
| 2 | $\begin{cases} 2x + 3y = 10; \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$ | В Два     |
|   |  | Г Три     |
| 3 | $\begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ 4x + 5y = 19 \end{cases}$ | Д Безліч  |
| 4 | $\begin{cases}  x  - y = 3; \\  x  + y = 3 \end{cases}$  |           |

20.25. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та першими компонентами розв'язків ( $x_0$ ;  $y_0$ ) цих систем (А–Д).

- |   |   |      |
|---|---|------|
| 1 | $\begin{cases} x + y = 20; \\ x - y = 14 \end{cases}$ | А 8  |
|   |   | Б 10 |
| 2 | $\begin{cases} x + y = 19; \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ | В 12 |
|   |   | Г 14 |
| 3 | $\begin{cases} x + y = 16; \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ | Д 17 |
| 4 | $\begin{cases} x - 3y = 1; \\ x + y = 13 \end{cases}$ |      |

20.26. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та рівняннями (А–Д) утворюються з цих систем при їх розв'язуванні способом підстановки.

- |   |  |                      |
|---|--|----------------------|
| 1 | $\begin{cases} x - y = 1; \\ xy = 20 \end{cases}$  | А $y^2 + 20y = 0$    |
|   |  | Б $y^2 + y + 20 = 0$ |
| 2 | $\begin{cases} x + y = 1; \\ xy = -20 \end{cases}$ | В $y^2 + y - 20 = 0$ |
|   |  | Г $y^2 - y + 20 = 0$ |
| 3 | $\begin{cases} x - y = 1; \\ xy = -20 \end{cases}$ | Д $y^2 - y - 20 = 0$ |
| 4 | $\begin{cases} x + y = 1; \\ xy = 20 \end{cases}$  |                      |

20.27. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та першими компонентами  $x_0$  розв'язків  $(x_0; y_0)$  цих систем (А–Д).

$$1 \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{6}; \\ \frac{1}{x} - \frac{5}{y} = -\frac{1}{12} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{А } 6 \\ \text{Б } 12 \\ \text{В } 16 \\ \text{Г } 20 \end{array}$$

$$2 \begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 13; \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \end{cases} \quad \text{Д } 24$$

$$3 \begin{cases} 3^{x-y} = 81; \\ 2^{x+\frac{y}{2}} = 128 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} \log_2(x+y) = 4; \\ \log_2(x-y) = 3 \end{cases}$$

20.28. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та кількістю їх розв'язків (А–Д).

$$1 \begin{cases} xy = 1; \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{А Жодного} \\ \text{Б Один} \\ \text{В Два} \\ \text{Г Три} \\ \text{Д Чотири} \end{array}$$

$$2 \begin{cases} xy = 1; \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} xy = 1; \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} xy = 0; \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

Розв'яжіть завдання 20.29–20.44. Відповідь запишіть десятковим дробом.

20.29. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} 2x + 5y = 12; \\ 3x - 4y = -5. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму  $x_0 + y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

20.30. Вказати значення параметра  $a$ , за якого система  $\begin{cases} ax + 3y = 9, \\ 12x + ay = 18 \end{cases}$  має безліч розв'язків.

20.31. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} x + y = 7; \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму  $x_0 + y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

20.32. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3; \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму

$x_0 + y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

20.33. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} x^2 - xy = 6; \\ y^2 - xy = 3. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму  $x_0 + y_0$ ,

де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

20.34. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 2x^2 + 5xy - y^2 = 17. \end{cases}$  У відповідь записати найбільше значення  $x$  із розв'язків системи.

20.35. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} \frac{3}{2x+y} + \frac{1}{2x-y} = \frac{2}{5}, \\ \frac{7}{2x+y} + \frac{2}{2x-y} = \frac{3}{5}. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму  $x_0 + y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

20.36. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1; \\ y(x+2) = 40. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму  $x_0 + y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

20.37. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} 2 \cdot 3^x - 4^y = 14; \\ 3^x + 4^y = 13. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму  $x_0 + y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

20.38. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 40; \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 3 \lg 2. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму  $x_0 + y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

20.39. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 10; \\ \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{y+1} = 16. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму  $x_0 + y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

20.40. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} xy = 1; \\ yz = 2; \\ zx = 8. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму  $x_0 + y_0 + z_0$ , де  $(x_0; y_0; z_0)$  — розв'язок системи.

20.41. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} 4xy - \frac{x}{y} = 30; \\ 3xy + \frac{2x}{y} = 28. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму  $x_0 + y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.



- 20.42. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 \approx 0; \\ x^2 - 3xy + y^2 \approx -1. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму  $x_0 + y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

- 20.43. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} \log_8(xy) = 3 \log_8 x \cdot \log_8 y; \\ 4 \log_8 \frac{x}{y} = \frac{\log_8 x}{\log_8 y}. \end{cases}$  У відповідь записати найбільшу суму  $x_0 + \sqrt{2}y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

- 20.44. За якого значення  $a$  сума  $x + y$  набуває найменшого значення, якщо  $\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8; \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$

### ТЕМА 3. ЦІЛІ ВИРАЗИ

**Степенем числа  $a$  з натуральним показником  $n$  ( $n > 1$ )** називають добуток  $n$  множників, кожен з яких дорівнює  $a$ :

$$a^n = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{n \text{ множників}}.$$

Вважають, що  $a^1 = a$ .

Якщо  $a \neq 0$  і  $n$  — натуральне число, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Степінь числа 0 з від'ємним показником не визначений.

Вважають, що  $a^0 = 1$ , якщо  $a \neq 0$ .

**Степенем додатного числа  $a$  з раціональним показником  $\frac{m}{n}$** , де  $m$  — ціле число, а  $n$  — натуральне ( $n > 1$ ), називають корінь  $n$ -го степеня з числа  $a^m$ :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

**Основні властивості степенів:**

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ;
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ;
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ;
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ ;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ .

**Одночленами** називають числа, змінні, їхні степені з натуральними показниками та добутки. Наприклад,  $5$ ;  $x$ ;  $\frac{2}{5}a^7$ ;  $5m^2n \cdot (-3)m^4$ . Одночлен, який містить єдиний числовий множник, записаний першим (**коефіцієнт**), та степені різних змінних, називають **одночленом стандартного вигляду**. Наприклад, щоб подати одночлен  $5m^2n \cdot (-3)m^4$  у стандартному вигляді, слід помножити  $5$  і  $-3$  та  $m^2$  і  $m^4$ :  $5m^2n \cdot (-3)m^4 = -15m^6n$ . Коефіцієнт цього одночлена — число  $-15$ .

**Степенем одночлена** називають суму показників степенів усіх змінних, які входять до нього. Якщо одночлен містить лише число, то його степінь дорівнює нулю. Наприклад,  $-15m^6n$  — одночлен сьомого степеня,  $10x$  — одночлен першого степеня,  $78$  — одночлен нульового степеня.

**Многочленом** називають суму кількох одночленів. Доданки многочлена, які відрізняються лише коефіцієнтом, називають **подібними членами** (доданками) многочлена. Наприклад, у тричлені  $3x^2 - 9x^5 \cdot 2y^2z - x^2$  подібними доданками є  $3x^2$  та  $-x^2$ .

Многочлен, який містить лише одночлени стандартного вигляду, серед яких немає подібних членів, називають **многочленом стандартного вигляду**. Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, з яких складається даний многочлен.

**Приклад 1.** Подати многочлен  $3x^2 - 9x^5 \cdot 2y^2z - x^2$  у стандартному вигляді й визначити його степінь.

■  $3x^2 - 9x^5 \cdot 2y^2z - x^2 = 3x^2 - x^2 - 18x^5y^2z = 2x^2 - 18x^5y^2z$ . Даний многочлен є многочленом восьмого степеня. ■

**Щоб додати (відняти) многочлени**, потрібно розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+» або «-», та звести подібні доданки, якщо вони є.

**Приклад 2.** Виконати дії:

$$\square (2x^2 + 4x - 5) + (5x^2 - 7) = 2x^2 + 4x - 5 + 5x^2 - 7 = 7x^2 + 4x - 12;$$

$$(2x^2 + 4x - 5) - (5x^2 - 7) = 2x^2 + 4x - 5 - 5x^2 + 7 = -3x^2 + 4x + 2. \blacksquare$$

Якщо перед дужками стоїть знак «+», то при розкриванні дужок знаки всіх одночленів, які були у дужках, не змінюються; якщо знак «-» — то знаки змінюються на протилежні.

**Щоб помножити одночлен на многочлен**, потрібно одночлен помножити на кожен член многочлена й отримані добутки додати.

**Приклад 3.** Виконати дії:

$$\blacksquare 3ab^4 \cdot (a^2b - 8a) = 3ab^4 \cdot a^2b + 3ab^4 \cdot (-8a) = 3a^3b^5 - 24a^2b^4. \blacksquare$$

**Щоб помножити многочлен на многочлен**, потрібно кожен член одного многочлена помножити на кожен член іншого многочлена й отримані добутки додати.

**Приклад 4.** Виконати дії:

$$\blacksquare (x^2 - 7)(3x - 5) = x^2 \cdot 3x + x^2 \cdot (-5) + (-7) \cdot 3x + (-7) \cdot (-5) = 3x^3 - 5x^2 - 21x + 35. \blacksquare$$

**Формули скороченого множення.**

$$\bullet (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

$$\bullet (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

$$\bullet (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$\bullet (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

$$\bullet (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n$$

(квадрат многочлена дорівнює сумі квадратів усіх його членів й усіх їх подвоєних парних добутків. Наприклад,  $(m - x + 3c)^2 = m^2 + x^2 + 9c^2 - 2mx + 6mc - 6xc$ .)

**Приклад 5.** Подати у вигляді многочлена  $(3b - 5)^2$ .

$$\blacksquare (3b - 5)^2 = (3b)^2 - 2 \cdot 3b \cdot 5 + 5^2 = 9b^2 - 30b + 25. \blacksquare$$

**Приклад 6.** Обчислити:  $(\sqrt{11} + 2)(\sqrt{11} - 2)$ .

$$\blacksquare (\sqrt{11} + 2)(\sqrt{11} - 2) = (\sqrt{11})^2 - 2^2 = 11 - 4 = 7. \blacksquare$$

**Приклад 7.** Спростити вираз  $\frac{49 + x^{10} - 14x^5}{x^{10} - 49}$ .

$$\blacksquare \frac{49 + x^{10} - 14x^5}{x^{10} - 49} = \frac{(7 - x^5)^2}{(x^5 - 7)(x^5 + 7)} = \frac{(x^5 - 7)^2}{(x^5 - 7)(x^5 + 7)} = \frac{x^5 - 7}{x^5 + 7} \blacksquare$$

**Приклад 8.** Скоротити дріб  $\frac{13 - x}{\sqrt{x} + \sqrt{13}}$ .

$$\blacksquare \frac{13 - x}{\sqrt{x} + \sqrt{13}} = \frac{(\sqrt{13} - \sqrt{x})(\sqrt{13} + \sqrt{x})}{\sqrt{x} + \sqrt{13}} = \sqrt{13} - \sqrt{x} \blacksquare$$

**Розкладання многочлена на множники.**

- Винесення спільного множника за дужки.

Наприклад,  $12a^5 - 30a^3b + 6a^3 = 6a^3 \cdot 2a^2 + 6a^3 \cdot (-5b) + 6a^3 \cdot 1 = 6a^3 \cdot (2a^2 - 5b + 1)$ .

- Використання формул скороченого множення.

Наприклад,  $100x^2 - y^8 = (10x)^2 - (y^4)^2 = (10x - y^4)(10x + y^4)$ .

- Групування.

Наприклад,  $6x^2y^2 + 8y + 3x^2y + 4 = (6x^2y^2 + 3x^2y) + (8y + 4) = 3x^2y \cdot (2y + 1) + 4 \cdot (2y + 1) = (2y + 1)(3x^2y + 4)$ .

**Приклад 9.** На скільки значення дробу  $\frac{(20 - 48)(-5 - 20)}{-5}$  менше від 40?

А	Б	В	Г	Д
160	140	180	200	120

$\blacksquare$  Знайдемо значення дробу:  $\frac{(20 - 48)(-5 - 20)}{-5} = \frac{-28 \cdot (-25)}{-5} = -\frac{28 \cdot 25}{5} = -140$ . Встано-

вимо, на скільки 40 більше від  $-140$ :  $40 - (-140) = 40 + 140 = 180$ .

Відповідь. В.  $\blacksquare$

**Приклад 10.** Визначити значення виразу  $x + y$ , якщо  $|x - y| + |4 - x| = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
4	Інша відповідь	0	6	8

$\blacksquare$  Значення виразів  $|x - y|$  і  $|4 - x|$  — невід'ємні. Сума двох невід'ємних виразів дорівнює нулю лише тоді, коли кожен з них дорівнює нулю. Знайдемо, за яких значень  $x$  та  $y$  це

відбудеться.  $\begin{cases} |4 - x| = 0, \\ |x - y| = 0; \end{cases} \begin{cases} 4 - x = 0, \\ x - y = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 4, \\ y = x; \end{cases} \begin{cases} x = 4, \\ y = 4. \end{cases}$  Якщо  $x = 4, y = 4$ , то  $x + y = 4 + 4 = 8$ .

Відповідь. Д.  $\blacksquare$

Завдання 3.1–3.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

3.1. Обчислити:  $9999 \cdot 1001 + 1001$ .

А	Б	В	Г	Д
1010000	10100	101001	101000	10010000

3.2. Обчислити:  $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{2008}$ .

А	Б	В	Г	Д
2008	-2008	0	1	-1

3.3. Обчислити:  $\frac{9^5 \cdot 4^3}{27^4 \cdot 2^5}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{9}$	1	2	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{9}$

3.4. Обчислити:  $\frac{4 \cdot 3^{32} + 9 \cdot 3^{30}}{9^{16}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$4 \cdot 3^{16}$	15	13	$4 \cdot 3^{14}$	5

3.5. Знайти значення виразу  $\frac{5^{3n+2} \cdot 2^{3n+1}}{1000^n}$ .

А	Б	В	Г	Д
2	$10^n$	5	50	$10^{n+2}$

3.6. На скільки  $\frac{4^{a+1} - 2^{2a-1}}{2^{2a}}$  менше від 9?

А	Б	В	Г	Д
3,5	3	4,5	5,5	7

3.7. Подати у вигляді многочлена вираз  $\overline{abc} + \overline{cab}$ .

А	Б	В	Г	Д
$110a + 11b + 101c$	$2a + 2b + 2c$	$200a + 20b + 2c$	$200a + 2b + 20c$	$111a + 11b + c$

3.8. Відомо, що  $a + b = 1$ ,  $b + c = 2$ ,  $a + c = 3$ . Знайти  $3(a + b + c)$ .

А	Б	В	Г	Д
6	9	12	15	18

3.9. Спростити вираз  $(a - 1)(a^9 + a^8 + a^7 + \dots + a^2 + a + 1) + 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$a^{10} + a^9$	$a^{10} + a$	$a^{10} - 1$	$a^{10}$	$a^9$

3.10. Спростити вираз  $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^3 + 1) \cdot \dots \cdot (2^{32} + 1) + 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$2^{34}$	$2^{64}$	$2^{64} + 2$	$2^{34} + 2$	$2^{34} - 2$

3.11. Розкласти на множники вираз  $4(x + y)^2 - 9(x - y)^2$ .

А	Б	В	Г	Д
$-(13x - 5y) \times (13x + 5y)$	$(13x - 5y) \times (13x - 5y)$	$-(5x - y) \times (5x + y)$	$(5x - y) \times (5x + y)$	$(5x - y) \times (5y - x)$

3.12. Подати многочлен  $0,25x^2 + y^2 - xy - t^2$  у вигляді добутку.

А	Б	В	Г	Д
$(0,25x - y - t) \times (0,25x + y + t)$	$(0,25x - y - t) \times (0,25x - y + t)$	$(0,05x - y - t) \times (0,05x - y + t)$	$(0,5x - y - t) \times (0,5x - y + t)$	$(0,5x - y + t) \times (0,5x + y + t)$

3.13. Розкласти многочлен  $x^4 + x^2 + 1$  на множники і знайти суму вільних членів многочленів розкладу.

А	Б	В	Г	Д
2	4	0	1	-1

3.14. Знайти  $(a - b)^2$ , якщо  $(a + b)^2 = 36$ ,  $a^2 - b^2 = 24$ .

А	Б	В	Г	Д
2	4	8	16	32

3.15. Знайти  $(a + b)^4$ , якщо  $(ab)^3 = 125$ ,  $a^2 + b^2 = 15$ .

А	Б	В	Г	Д
25	225	400	500	625

3.16.  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2007 - 2008 = \dots$

А	Б	В	Г	Д
2008	-2008	1004	-1004	0

3.17.  $(200 + 1)(200 - 2)(200 + 3)(200 - 4) \dots (200 + 2007)(200 - 2008) = \dots$

А	Б	В	Г	Д
2008000	-2008000	1004000	-1004000	0

3.18. Знайти  $x$ , якщо  $222222x = 111111 + 222222 + 333333 + 444444$ .

А	Б	В	Г	Д
1	4	5	10	12

3.19. Обчислити:  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2$ .

А	Б	В	Г	Д
-500	4949	$101^2 - 1$	-50	5151

3.20. Спростити вираз:  $70 \cdot (71^9 + 71^8 + 71^7 + \dots + 71^2 + 71) + 71$ .

А	Б	В	Г	Д
$70^{10}$	$71^{10} - 1$	$71^{10}$	$71^{10} + 1$	$70^{10} + 1$

3.21. Якою цифрою закінчується значення виразу  $11^6 + 14^6 - 13^3$ ?

А	Б	В	Г	Д
0	2	3	5	7

3.22. Знайти частку від ділення многочленів  $x^4 - x^2 + x + 1$  та  $x^3 - x^2 + 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$x^2 - 1$	$x$	$x - 1$	$x + 1$	$x^2 + 1$

3.23. Знайти остачу від ділення многочлена  $x^3 + 5x^2 - x - 4$  на двочлен  $x - 1$ .

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	-1	-2

Завдання 3.24–3.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

3.24. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

- |                          |             |
|--------------------------|-------------|
| 1 $x^2 - (x - 1)(x + 3)$ | А $2x + 3$  |
| 2 $x^2 - (x + 1)(x + 3)$ | Б $4x - 3$  |
| 3 $x^2 - (x - 1)(x - 3)$ | В $-4x - 3$ |
| 4 $x^2 - (x + 1)(x - 3)$ | Г $-4x + 3$ |
|                          | Д $-2x + 3$ |

3.25. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

- |                                  |                 |
|----------------------------------|-----------------|
| 1 $(a - 2b)^2 - (a - b)(a + b)$  | А $2ab - 5a^2$  |
| 2 $(2a + b)(b - 2a) - (a - b)^2$ | Б $2ab - 5b^2$  |
| 3 $(-2a - b)^2 - (a - b)^2$      | В $-4ab + 5b^2$ |
| 4 $-(2a - b)^2 - (a - b)(a + b)$ | Г $4ab - 5a^2$  |
|                                  | Д $6ab + 3a^2$  |

3.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх розкладами на множники (А–Д).

- |                        |                    |
|------------------------|--------------------|
| 1 $ax - ay - by + bx$  | А $(a + b)(y - x)$ |
| 2 $ax + ay - bx - by$  | Б $(a + b)(x - y)$ |
| 3 $-ax + ay + bx - by$ | В $(a - b)(x - y)$ |
| 4 $ax - ay - bx + by$  | Г $(a - b)(y - x)$ |
|                        | Д $(a - b)(x + y)$ |

3.27. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх розкладами на множники (А–Д).

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| 1 $4(x - y)^2 - 9y^2$ | А $(x + 3y)(5x - 3y)$ |
| 2 $4(x - y)^2 - 9x^2$ | Б $(x - 3y)(5x - 3y)$ |
| 3 $9(x - y)^2 - 4y^2$ | В $(x + 2y)(2y - 5x)$ |
| 4 $9(y - x)^2 - 4x^2$ | Г $(2x + y)(2x - 5y)$ |
|                       | Д $(3x - 5y)(3x - y)$ |

3.28. Установити відповідність між сумами (1–4) та їх записами у вигляді многочленів (А–Д).

1  $\overline{abc} + \overline{bac}$

2  $\overline{abc} + \overline{cba}$

3  $\overline{abc} + \overline{acb}$

4  $\overline{bac} + \overline{cab}$

А  $2a + 110b + 110c$

Б  $20a + 101b + 101c$

В  $101a + 20b + 101c$

Г  $110a + 110b + 2c$

Д  $200a + 11b + 11c$

Розв'яжіть завдання 3.29–3.34. Відповідь запишіть десятковим дробом.

3.29. Знайти значення виразу  $\frac{2^{21} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^{10} \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$ .

3.30. Знайти частку від ділення  $16^5 + 2^{15}$  на 33 у вигляді степеня числа 2. У відповідь записати показник степеня.

3.31. Виконати ділення многочлена  $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$  на двочлен  $x - 3$  і знайти значення отриманої частки, якщо  $x = -2$ .

3.32. Якою цифрою закінчується значення виразу  $15^9 + 26^9 + 39^9$ ?

3.33. Якою цифрою закінчується число  $99^{99}$ ?

3.34. Знайти, за яких значень  $a$  і  $b$  многочлен  $x^4 + 6x^3 + 3x^2 + ax + b$  ділиться без остачі на многочлен  $x^2 + 4x + 3$ . У відповідь записати суму  $a_0 + b_0$  знайдених значень  $a$  та  $b$ .



## ТЕМА 4. ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Вирази, які можуть містити додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня чисел та змінних, називають *раціональними*. Якщо раціональний вираз не містить ділення на вираз зі змінною, то його називають цілим, а інакше — дробовим.

Наприклад, вирази  $2 + a^2$ ;  $\frac{6(a+b)}{7}$  — цілі раціональні, а вирази  $\frac{4k+y}{3m-c}$ ;  $x^2 + x + \frac{1}{x}$  — дробові раціональні.

Два вирази називають *тотожно рівними*, якщо для всіх допустимих значень змінних їхні відповідні значення рівні. Наприклад, тотожно рівними є вирази  $2x^2 - 18$  та  $(2x + 6) \cdot (x - 3)$ .

*Раціональним дробом* називають вираз виду  $\frac{A}{B}$ , де  $A$  і  $B$  — многочлени.

Якщо чисельник і знаменник раціонального дробу помножити або поділити на многочлен, відмінний від нуля-многочлена, то одержимо дріб, тотожно рівний даному:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot R}{B \cdot R}, \quad R \neq 0.$$

*Застосування основної властивості дробу:*

- *скорочення дробу* — ділення чисельника і знаменника на спільний множник. Щоб скоротити дріб, слід спочатку чисельник і знаменник розкласти на множники.

**Приклад 1.** Скоротити дріб  $\frac{12 - 3x^2}{15x + 30}$ .

$$\blacksquare \frac{12 - 3x^2}{15x + 30} = \frac{3(4 - x^2)}{15(x + 2)} = \frac{3(2 - x)(2 + x)}{15(2 + x)} = \frac{2 - x}{5}. \blacksquare$$

- *зведення дробів до спільного знаменника*. Щоб звести дробу до спільного знаменника, потрібно:

- 1) розкласти на множники знаменники дробів;
- 2) скласти спільний знаменник, внісши до нього усі різні множники у найвищих степенях, в яких вони входять у розклади знаменників;
- 3) знайти додатковий множник для кожного дробу (для цього спільний знаменник треба поділити на знаменник дробу);
- 4) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник.

- *додавання, віднімання*. Щоб додати чи відняти дробу з різними знаменниками, слід спочатку звести їх до спільного знаменника.

• **Приклад 2.** Знайти різницю дробів  $\frac{a^2 - 2b}{a^2 - b^2} - \frac{a}{a + b}$ .

$$\blacksquare \frac{a^2 - 2b}{a^2 - b^2} - \frac{a}{a + b} = \frac{a^2 - 2b}{(a - b)(a + b)} - \frac{a}{a + b} = \frac{a^2 - 2b}{(a - b)(a + b)} - \frac{a(a - b)}{(a - b)(a + b)} = \frac{a^2 - 2b - a^2 + ab}{(a - b)(a + b)} = \frac{-2b + ab}{a^2 - b^2}. \blacksquare$$

- *множення*. Добутком двох раціональних дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник — добутку знаменників.

**Приклад 3.** Знайти добуток дробів  $\frac{2a^2}{x} \cdot \frac{y}{6ab}$ .

$$\blacksquare \frac{2a^2}{x} \cdot \frac{y}{6ab} = \frac{2a^2 \cdot y}{x \cdot 6ab} = \frac{ay}{3xb}. \blacksquare$$

- ділення:  $\frac{A_1}{B_1} : \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1 \cdot B_2}{B_1 \cdot A_2}$ .

**Приклад 4.** Знайти частку дробів  $\frac{16x^3}{(a+7)} : \frac{12xy}{a^2-49}$ .

■  $\frac{16x^3}{a+7} : \frac{12xy}{a^2-49} = \frac{16x^3 \cdot (a^2-49)}{(a+7) \cdot 12xy} = \frac{16x^3 \cdot (a-7)(a+7)}{(a+7) \cdot 12xy} = \frac{4x^2(a-7)}{3y}$ . ■

- піднесення раціонального дробу до степеня з цілим показником:  $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$ .

Завдання 4.1–4.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

4.1.  $\frac{8}{5a-2} + \frac{3}{2-5a} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{11}{2-5a}$	$\frac{11}{5a-2}$	$\frac{5}{2-5a}$	$\frac{5}{5a-2}$	$\frac{24}{5a-2}$

4.2.  $\frac{c^2}{c^2-4} - \frac{c}{c-2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2c}{4-c^2}$	$\frac{2c}{c^2-4}$	$\frac{c^2}{c^2-4}$	$\frac{c^2}{4-c^2}$	$\frac{c^2-c}{c^2-4}$

4.3.  $\frac{a^2-14a+49}{a^2} \cdot \frac{a^6}{a^2-49} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$a^4(a-7)$	$\frac{a^3(a-7)}{a+7}$	$\frac{a^4(a-7)}{a+7}$	$-14a^5$	$\frac{a^4(a+7)}{a-7}$

4.4.  $(b+20) : \frac{b^2+20b}{3} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{b^2}{3}$	$\frac{b(b+20)^2}{3}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{3}{b}$	$\frac{3}{b^2}$

4.5.  $\frac{7}{ab} - \frac{3a+6}{a} \cdot \frac{5}{a+2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7-15a}{ab}$	$\frac{7-15b}{ab}$	$\frac{7+15b}{ab}$	$\frac{7+15a}{ab}$	$\frac{7b-15}{ab}$

4.6.  $\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a}\right) : (2a+1) = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{(2a+1)^2}$	$\frac{a(a+1)}{(2a+1)^2}$	$\frac{(2a+1)^2}{a(a+1)}$	$a^2 + a$	$\frac{1}{a^2 + a}$

4.7.  $a + \frac{81}{a-9} + 9 = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a-9}{a^2}$	$\frac{a^2}{a-9}$	$\frac{a+90}{a-9}$	$\frac{a-9}{a+90}$	$\frac{81}{a^2 - 81}$

4.8.  $\frac{a^3+8}{a^3-4a} \cdot \frac{7a-14}{a^2-2a+4} + \frac{a}{7} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2a}{7}$	$\frac{7a}{a+7}$	$\frac{a+7}{7a}$	$\frac{a^2+49}{7a}$	$\frac{7a}{a^2+49}$

4.9.  $(a^2 - b^2) : (a^{-1} + b^{-1}) = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$ab(a-b)$	$\frac{1}{ab(a-b)}$	$\frac{ab}{a-b}$	$\frac{a-b}{ab}$	$ab(a+b)$

4.10.  $\frac{a^6 + a^{13}}{a^{-6} + a^{-13}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{a^{19}}$	$\frac{1}{a^{78}}$	$a^{78}$	$a^{19}$	$\frac{1}{a^7}$

4.11.  $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{a}\right)^{-1} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{(ab+1)^2}{ab}$	$\frac{a+b}{ab}$	$\frac{ab}{a+b}$

4.12. Якщо  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ , то  $c = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$a-b$	$\frac{ab}{b-a}$	$\frac{a-b}{ab}$	$\frac{ab}{a-b}$	$ab$

4.13.  $\frac{a+b}{b} = 4$ . Знайти значення виразу  $\frac{b}{a}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	4	3	$\frac{1}{3}$	5

4.14.  $a + a^{-1} = b$ . Знайти значення виразу  $a^2 + a^{-2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{b^2 - 2}$	$\frac{1}{b^2}$	$b^2 - 2$	$2b - 1$	$b^2 + 2$

4.15. Якщо  $y = \frac{x^2}{z}$  ( $x \neq 0, z \neq 0$ ), то  $\frac{1}{x^2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{zy}$	$\frac{z}{y}$	$\frac{y}{z}$	$yz$	$\frac{1}{yz}$

4.16.  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+a}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a+3}{2}$	$\frac{2a+3}{a+2}$	$\frac{2a+1}{a+2}$	$\frac{a+2}{2a+1}$	$\frac{2a+1}{2a+2}$

4.17.  $\frac{a+a^2+\dots+a^{2007}}{a^{-1}+a^{-2}+\dots+a^{-2007}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$a^{2007}$	$a^{2008}$	$\frac{1}{a^{2008}}$	$\frac{1}{a^{2006}}$	$a^{2006}$

4.18.  $\frac{3}{1-a^3} + \frac{3}{1+a^3} + \frac{6}{1+a^6} + \frac{12}{1+a^{12}} + \frac{24}{1+a^{24}} + \frac{48}{1+a^{48}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{96}{1-a^{96}}$	$\frac{1-a^{96}}{96}$	$\frac{96}{1+a^{48}}$	$\frac{96}{1+a^{96}}$	$\frac{48}{1-a^{48}}$

4.19.  $\frac{a}{b} = 2$ . Знайти значення виразу  $\frac{4b^2 + a^2}{a^2 - ab}$ .

А	Б	В	Г	Д
-16	8	4	-8	-4

4.20. Обчислити:  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

Завдання 4.21–4.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

4.21. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

$$1 \frac{a^2 - b^2}{a + b} \cdot a - b$$

А 0

Б  $(a + b)^2$

$$2 \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} - \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

В  $4a^3$

Г  $(2a + 1)^2 - 1$

$$3 \frac{a^3 + b^3}{a + b} + 3ab$$

Д  $a^2 - 2ab + b^2$

$$4 4a^2 + 4a$$

4.22. Установити відповідність між дробовими виразами (1–4) та тотожно рівними їм нескоротними дробами (А–Д).

$$1 \frac{ay - ax}{by - bx}$$

А  $-\frac{a}{b}$

$$2 \frac{ax - bx}{a^2 - ab}$$

Б  $-\frac{b}{a}$

$$3 \frac{bx - by}{ay - ax}$$

В  $\frac{a}{b}$

$$4 \frac{a^2 - ab}{bx - ax}$$

Г  $\frac{x}{a}$

Д  $-\frac{a}{x}$

4.23. Установити відповідність між різницями (1–4) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

$$1 \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}$$

А  $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

$$2 \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}$$

Б  $\frac{a^2 + 2ab - b^2}{a^2 - b^2}$

$$3 \frac{a}{b-a} - \frac{b}{a+b}$$

В  $\frac{b^2 + 2ab - a^2}{a^2 - b^2}$

$$4 \frac{b}{a-b} - \frac{a}{a+b}$$

Г  $\frac{b^2 - 2ab - a^2}{a^2 - b^2}$

Д  $\frac{a^2 - 2ab - b^2}{a^2 - b^2}$

4.24. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1  $a^2 - \frac{1}{a}$

А  $\frac{1-a^2}{a}$

2  $1 - \frac{1}{a^2}$

Б  $\frac{1-a^2}{a^2}$

3  $\frac{1}{a^2} - 1$

В  $\frac{1-a^3}{a}$

4  $\frac{1}{a} - a$

Г  $\frac{a^2-1}{a}$

Д  $\frac{a^3-1}{a}$

4.25. Установити відповідність між частками (1–4) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1  $\left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right) : \frac{2}{a-1}$

А  $a+1$

Б  $a-1$

2  $\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1}\right) : \frac{2}{a+1}$

В  $\frac{1}{a+1}$

3  $\left(a + \frac{a}{a-1}\right) : a^2$

Г  $\frac{1}{a-1}$

4  $\left(a - \frac{a}{a+1}\right) : \frac{a^2}{a^2+2a+1}$

Д  $\frac{1}{1-a}$

4.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1  $\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$

А  $\frac{2a+1}{2(a+1)}$

2  $\frac{1}{1+\frac{1}{2a+1}}$

Б  $\frac{2a+1}{a+1}$

3  $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}$

В  $\frac{a+1}{2a+1}$

4  $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}$

Г  $\frac{a}{a+1}$

Д  $\frac{a+1}{a+2}$

Розв'яжіть завдання 4.27–4.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.

4.27. Спростити вираз  $\left(\frac{b}{9a-a^3} - \frac{1}{a^2+3a} + \frac{3}{a^2b-9b}\right) : \frac{b^2-6b+9}{a^3b-9ab}$  і знайти його значення, якщо  $a=3, b=2$ .

4.28. Спростити вираз  $\left(1 - \frac{1}{1-a}\right) : \left(1 - \frac{1-2a^2}{1-a} + a\right)$  і знайти його значення, якщо  $a=2$ .

4.29. Спростити вираз  $\frac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b} : \frac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}$ .

4.30. Спростити вираз  $\left(\frac{6}{a^2+5a+4} - \frac{2}{a^2+3a+2} + \frac{a}{a^2+6a+8}\right)^2 \cdot \frac{a^2+4a+4}{2}$ .

4.31. Спростити вираз  $\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right) : \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3}\right)$  і знайти його значення, якщо  $a=5$ .

4.32. Спростити вираз  $\frac{(ab^{-1} + a^{-1}b + 1)(a^{-1} - b^{-1})^2}{a^2b^{-2} + a^{-2}b^2 - (ab^{-1} + a^{-1}b)}$  і знайти його значення, якщо  $a=4, b=5$ .

4.33. Спростити вираз  $\frac{a}{a^2-1} + \frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1} + \frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1} - \frac{2a^3}{a^4-1}$  і знайти його значення, якщо  $a = \frac{3}{2}$ .

4.34. Спростити вираз  $\left(1 - \frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-n} - b^{-n}}\right)^{-2}$  і знайти його значення, якщо  $a=0, b=3\frac{7}{9}$ .

4.35. Спростити вираз  $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$ .

4.36. Спростити вираз  $1 - \frac{a}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}}}$  і знайти його значення, якщо  $a=8$ .

4.37. Спростити вираз  $\frac{(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (b+c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}$ .

4.38. Спростити вираз  $\frac{1}{a(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+6)} + \frac{1}{(a+6)(a+9)} + \frac{1}{(a+9)(a+12)} + \frac{1}{(a+12)(a+15)}$  і знайти його значення, якщо  $a=5$ .

4.39. Спростити вираз  $\frac{x^3y - xy^3 + y^3z - yz^3 + z^3x - zx^3}{x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2}$  і знайти його значення, якщо  $x = 1$ ,  
 $y = 0,1, z = 0,01$ .

4.40. Знайти значення виразу  $\frac{x^{3333} + x^{333} + x^{33} + x^3 + 1996}{100 \cdot (x^2 + x)}$ , якщо  $x^2 + x + 1 = 0$ .



## ТЕМА 5. ІРРАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

**Квадратним коренем** з числа  $a$  називають таке число, квадрат якого дорівнює  $a$ . Наприклад, для числа 100 квадратними коренями є числа 10 та  $-10$ , бо  $10^2 = 100$  і  $(-10)^2 = 100$ . Для всякого додатного числа існує два квадратні корені (вони є протилежними числами), квадратним коренем з нуля є нуль, а для від'ємних чисел квадратних коренів немає.

**Арифметичним квадратним коренем** з числа  $a$  називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює  $a$ , і позначають  $\sqrt{a}$ . Вираз  $\sqrt{a}$  має зміст, якщо  $a \geq 0$ . Наприклад, арифметичним квадратним коренем з числа 36 є  $\sqrt{36} = 6$ ; з числа 37 є  $\sqrt{37}$ .

Справедливі рівності:

- $\sqrt{a} = b$ , якщо  $b^2 = a$  та  $b \geq 0$ ;
- $(\sqrt{a})^2 = a$ ;
- $\sqrt{a^2} = |a|$ .

**Властивості арифметичного квадратного кореня:**

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ , якщо  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ;
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ , якщо  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ;
- $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$ .

**Корінь  $n$ -го степеня.**

**Коренем  $n$ -го степеня**, де  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$  з числа  $a$  називають таке число,  $n$ -й степінь якого дорівнює  $a$ . Корінь другого степеня прийнято називати квадратним коренем, а корінь третього степеня — **кубічним коренем**. Наприклад, коренями четвертого степеня з числа 625 є числа  $-5$  та  $5$  (бо  $(-5)^4 = 625$  і  $5^4 = 625$ ); кубічним коренем з числа  $-27$  є число  $-3$  (бо  $(-3)^3 = -27$ ). Якщо  $n$  — непарне натуральне число ( $n > 1$ ), то існує єдиний корінь  $n$ -го степеня з довільного числа  $a$ .

**Арифметичним коренем  $n$ -го степеня** з невід'ємного числа  $a$  називають таке невід'ємне число,  $n$ -й степінь якого дорівнює  $a$ , і позначають  $\sqrt[n]{a}$ . Якщо число  $n$  непарне, то запис  $\sqrt[n]{a}$  використовують і для від'ємних значень  $a$  і він означає корінь  $n$ -го степеня з числа  $a$  (але не арифметичний).

Справедливі рівності:

- $\sqrt[n]{a} = b$ , якщо  $b^n = a$  та  $b \geq 0$ ;
- $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ,
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ .

**Властивості арифметичних коренів  $n$ -го степеня:**

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ , якщо  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ;

- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ , якщо  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ;
- $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ , якщо  $a > 0$ ;
- $m \cdot \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ , якщо  $a \geq 0$ ,  $m$  та  $n$  — натуральні числа, більші від 1;
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = m \cdot \sqrt[n]{a}$ , якщо  $a \geq 0$ ,  $m$  та  $n$  — натуральні числа, більші від 1;

**Приклад 1.** Спростити:  $\sqrt[3]{18z^4} \cdot \sqrt[3]{12z^5}$ .

$$\blacksquare \sqrt[3]{18z^4} \cdot \sqrt[3]{12z^5} = \sqrt[3]{18z^4 \cdot 12z^5} = \sqrt[3]{216z^9} = \sqrt[3]{(6z^3)^3} = 6z^3. \blacksquare$$

**Приклад 2.** Обчислити:  $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[10]{64}$ .

$$\blacksquare \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[10]{64} = \sqrt[2]{2^2} \cdot \sqrt[10]{2^6} = \sqrt[2]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^{3 \cdot 2}} = \sqrt[2]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[2]{2^5} = 2. \blacksquare$$

**Перетворення виразів з коренями.**

*Внесення множника під знак кореня:*

- $b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b^n}$ , якщо  $b \geq 0$ , або якщо  $b < 0$  і  $n$  — непарне;
- $b \cdot \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{a \cdot b^n}$ , якщо  $b < 0$  і  $n$  — парне.

Наприклад:  $2 \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{7 \cdot 8} = \sqrt[3]{56}$ ;  $-5 \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{3 \cdot 5^2} = -\sqrt{3 \cdot 25} = -\sqrt{75}$ .

*Винесення множника за знак кореня:*

- $\sqrt[n]{a \cdot b^n} = b \cdot \sqrt[n]{a}$ , якщо  $b \geq 0$  або  $n$  — непарне;
- $\sqrt[n]{a \cdot b^n} = |b| \cdot \sqrt[n]{a} = -b \sqrt[n]{a}$ , якщо  $b < 0$  і  $n$  — парне.

**Приклад 3.** Винести множник за знак кореня: а)  $\sqrt[3]{54}$ ; б)  $\sqrt{3a^9}$ ; в)  $\sqrt[6]{5x^6y^2}$ , якщо  $x < 0$ .

$$\blacksquare \text{ а) } \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \cdot 27} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = 3 \cdot \sqrt[3]{2};$$

$$\text{ б) } \sqrt{3a^9} = \sqrt{3a \cdot (a^4)^2} = a^4 \cdot \sqrt{3a};$$

$$\text{ в) } \text{якщо } x < 0, \text{ то } \sqrt[6]{5x^6y^2} = |x| \cdot \sqrt[6]{5y^2} = -x \cdot \sqrt[6]{5y^2}. \blacksquare$$

**Приклад 4.** Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу:

$$\text{ а) } \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\text{ б) } \frac{6}{\sqrt[3]{2}};$$

$$\text{ в) } \frac{1}{\sqrt{x+3}}.$$

$$\blacksquare \text{ а) } \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\text{ б) } \frac{6}{\sqrt[3]{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{4};$$

$$в) \frac{1}{\sqrt{x+3}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3) \cdot (\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \quad \blacksquare$$

Степенем додатного числа  $a$  з раціональним показником  $\frac{m}{n}$ , де  $m$  — ціле число, а  $n$  — натуральне ( $n > 1$ ), називають корінь  $n$ -го степеня з числа  $a^m$ :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Вирази  $0^0$ ;  $0^{-\frac{3}{4}}$ ;  $(-2)^{1,7}$  не мають змісту.

**Приклад 5.** Знайти  $x$  із пропорції  $\sqrt{a^6\sqrt{a}} : \sqrt[6]{\sqrt{a}} = (\sqrt{a^{-3}})^{-1} : x$ .

А	Б	В	Г	Д
$a^2$	$a$	Інша відповідь	$\sqrt{a}$	$\sqrt[6]{\sqrt{a}}$

$$\blacksquare x = \frac{\sqrt{\sqrt{a}} \cdot (\sqrt{a^{-3}})^{-1}}{\sqrt{a^6\sqrt{a}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(a^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}^{-1}}{\sqrt[6]{a^7}} = \frac{a^{\frac{1}{12}} \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\left(a^{\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1+3}{12+2}}}{a^{\frac{7}{12}}} = a^{\frac{\frac{1+3}{2} + \frac{7}{12}}{12}} = a^{\frac{1+18-7}{12}} = a.$$

Відповідь. Б. ■

**Приклад 6.** Спростити вираз  $(1+\sqrt{a})(1+\sqrt[4]{a})(1+\sqrt[8]{a})(1+\sqrt[16]{a})(1+\sqrt[32]{a})(1-\sqrt[32]{a})$ .

А	Б	В	Г	Д
$1-\sqrt[8]{a}$	Інша відповідь	$1+\sqrt[32]{a}$	$1-a$	$1-\sqrt[64]{a}$

$$\blacksquare (1+\sqrt[32]{a})(1-\sqrt[32]{a}) = 1-\sqrt[64]{a}; \quad (1+\sqrt[16]{a})(1-\sqrt[16]{a}) = 1-\sqrt[32]{a}; \quad (1+\sqrt[8]{a})(1-\sqrt[8]{a}) = 1-\sqrt[16]{a}; \\ (1+\sqrt[4]{a})(1-\sqrt[4]{a}) = 1-\sqrt{a}; \quad (1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}) = 1-a.$$

Відповідь. Г. ■

Завдання 5.1–5.25 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

5.1. Обчислити:  $\sqrt{6400} + \sqrt{49} + \sqrt{0,04} + \sqrt{0,0025}$ .

А	Б	В	Г	Д
807,025	870,25	87,0205	87,25	870,025

5.2. Обчислити:  $\sqrt{1\frac{1}{36}} \cdot \sqrt{1\frac{12}{37}} + \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$26\frac{1}{6}$	$26\frac{13}{36}$	$5\frac{1}{6}$	$5\frac{5}{6}$	$6\frac{1}{6}$

5.3. Знайти значення виразу  $\sqrt{15^2} + \sqrt{(-13)^2} + (\sqrt{3})^2$ .

А	Б	В	Г	Д
5	31	37	32	42

5.4. Спростити вираз  $10\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}$ .

А	Б	В	Г	Д
$17\sqrt{2}$	$39\sqrt{2}$	$37\sqrt{2}$	$19\sqrt{2}$	$24\sqrt{2}$

5.5. Знайти значення виразу  $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} - \sqrt{7}$ .

А	Б	В	Г	Д
-3	$3-2\sqrt{7}$	$2-\sqrt{7}$	3	$-3-2\sqrt{7}$

5.6. Обчислити:  $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{16}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

5.7. Вказати правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{18}$	$\sqrt[3]{\sqrt{11}} = \sqrt[6]{11}$	$(\sqrt[3]{10})^5 = \sqrt[15]{10}$	$\sqrt[10]{(-2)^{10}} = -2$	$\sqrt[3]{(-3)^9} = -3$

5.8. Обчислити:  $16^{\frac{3}{4}} + 25^{\frac{1}{2}}$ .

А	Б	В	Г	Д
9	12	13	15	31

5.9. Обчислити:  $9^{\frac{2}{3}} + 64^{-\frac{1}{3}}$ .

А	Б	В	Г	Д
27,25	31	278	27	$-7\frac{5}{6}$

5.10. Обчислити:  $\sqrt[3]{5^6 \cdot 2^9}$ .

А	Б	В	Г	Д
200	8000	1600	400	800

5.11. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу  $\frac{3}{\sqrt{7}-1}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{7}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{7}-2}{2}$	$2(\sqrt{7}+1)$	$3(\sqrt{7}+1)$	$\frac{\sqrt{7}-1}{2}$

5.12. Внести множники під знаки коренів:  $a\sqrt{-a} + b\sqrt{b}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}$	$\sqrt{-a^3} + \sqrt{-b^3}$	$-\sqrt{-a^3} - \sqrt{b^3}$	$\sqrt{-a^3} + \sqrt{b^3}$	$-\sqrt{-a^3} + \sqrt{b^3}$

5.13.  $\sqrt[4]{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[9]{a^8}$	$\sqrt[8]{a}$	$\sqrt[8]{a^3}$	$\sqrt[3]{a^2}$

5.14. Спростити вираз  $\sqrt[3]{\frac{a^4\sqrt[3]{b^9}}{a^{-2}}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$-a^2b$	$-ab$	$a^2b$	$a^2b^2$	$ab^2$

5.15. Спростити вираз  $\sqrt[3]{\frac{x^9y^6z^3}{4 \cdot (-2)^4}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^3y^2z}{2}$	$\frac{x^6y^3}{4}$	$\frac{x^3y^2z}{4}$	$\frac{x^6y^3}{2}$	$\frac{x^3y^2}{4z}$

5.16. Знайти  $x$ , якщо  $\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}} = 2^x$ .

А	Б	В	Г	Д
-1,125	-0,875	-0,625	-0,375	-0,125

5.17.  $\sqrt{(-2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
0	4	-4	$4+2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$

5.18. Знайти значення виразу  $\sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[4]{(x-7,5)^4}$ , якщо  $x = \sqrt{10}$ .

А	Б	В	Г	Д
-4,5	$2\sqrt{10}-10,5$	$2x-10,5$	4,5	3,5

5.19.  $\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{10}$	$3,5+\sqrt{10}$	$\sqrt{3}+2$	$\sqrt{2}+\sqrt{5}$	$1+\sqrt{6}$

5.20. Звільнитись від ірраціональності в знаменнику дробу  $\frac{2}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{5}(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2})$	$\frac{2}{5}(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})$	$\frac{2}{5}(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})$	$\frac{2}{5}(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2})$	$\frac{2}{5}(\sqrt[3]{49}+2\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4})$

5.21. Обчислити:  $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} - \frac{3\sqrt{5}}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
7	$3\sqrt{5}$	$\frac{13+3\sqrt{5}}{4}$	3,5	$-1-1,5\sqrt{5}$

5.22. Знайти значення виразу  $\sqrt{71-16\sqrt{7}} + \sqrt{11-4\sqrt{7}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$10-2\sqrt{7}$	-10	-6	10	6

5.23. Обчислити:  $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

5.24. Обчислити:  $(\sqrt{2}-1)\sqrt{4+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	$2\sqrt{2}$

5.25. Обчислити:  $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	3	5	8	9

Завдання 5.26–5.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

5.26. Установити відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

- |   |  |   |               |
|---|--|---|---------------|
| 1 | $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$                | А | $2+\sqrt{2}$  |
|   |  | Б | $-2-\sqrt{2}$ |
| 2 | $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-2)^3}$             | В | $2-\sqrt{2}$  |
|   |  | Г | $6-4\sqrt{2}$ |
| 3 | $-\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}\right)^4$ | Д | $\sqrt{2}-2$  |
| 4 | $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$                   |   |               |

5.27. Установити відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

- |   |                             |   |                    |
|---|-----------------------------|---|--------------------|
| 1 | $\sqrt[4]{16a^4b^8}, a < 0$ | А | $2 a b^2$          |
|   |                             | Б | $2a^2b^2$          |
| 2 | $\sqrt[3]{16a^3b^6}$        | В | $-2ab^2$           |
|   |                             | Г | $2ab^2$            |
| 3 | $\sqrt{4a^4b^4}$            | Д | $2\sqrt[3]{2ab^2}$ |
| 4 | $\sqrt{4a^2b^4}$            |   |                    |

5.28. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |   |  |   |                |
|---|--|---|----------------|
| 1 | $(-27)^{\frac{1}{3}}$                    | А | $-\frac{1}{3}$ |
|   |  | Б | $\frac{1}{3}$  |
| 2 | $(-27)^{-\frac{1}{3}}$                   | В | $-3$           |
|   |  | Г | $3$            |
| 3 | $27^{-\frac{1}{3}}$                      | Д | $6$            |
| 4 | $27^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}}$ |   |                |

5.29. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |   |                                      |   |             |
|---|--------------------------------------|---|-------------|
| 1 | $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{72}$  | А | $2\sqrt{2}$ |
|   |                                      | Б | $3\sqrt{2}$ |
| 2 | $\sqrt{72} + \sqrt{50} - \sqrt{162}$ | В | $4\sqrt{2}$ |
|   |                                      | Г | $5\sqrt{2}$ |
| 3 | $\sqrt{200} - \sqrt{8} - \sqrt{50}$  | Д | $6\sqrt{2}$ |
| 4 | $\sqrt{128} + \sqrt{18} - \sqrt{98}$ |   |             |

5.30. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |   |  |               |
|---|--|---------------|
| 1 | $\sqrt{(-1-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(4-\sqrt{5})^2}$ | А 1           |
| 2 | $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(-1-\sqrt{5})^2}$ | Б $\sqrt{5}$  |
| 3 | $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$  | В 4           |
| 4 | $\sqrt{(-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}$   | Г $2\sqrt{5}$ |
|   |  | Д 5           |

5.31. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм степенями (А–Д).

- |   |                                    |                       |
|---|------------------------------------|-----------------------|
| 1 | $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$ | А $a^{\frac{7}{16}}$  |
| 2 | $\sqrt{a^4\sqrt{a\sqrt{a}}}$       | Б $a^{\frac{9}{16}}$  |
| 3 | $\sqrt{a\sqrt{a^3\sqrt{a}}}$       | В $a^{\frac{11}{16}}$ |
| 4 | $\sqrt[4]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$      | Г $a^{\frac{13}{16}}$ |
|   |                                    | Д $a^{\frac{15}{16}}$ |

5.32. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

- |   |   |      |
|---|---|------|
| 1 | $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$             | А -2 |
| 2 | $\sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{3}$             | Б -1 |
| 3 | $\sqrt{12-6\sqrt{3}} - \sqrt{3}$            | В 1  |
| 4 | $\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ | Г 2  |
|   |   | Д 3  |

Розв'яжіть завдання 5.33–5.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

5.33. Обчислити:  $(\sqrt[5]{27} + \sqrt[3]{64})(\sqrt[5]{27} - \sqrt[3]{64})$ .

5.34. Обчислити:  $(\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5+2\sqrt{6}})\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$ .

5.35. Обчислити:  $\frac{53}{8-\sqrt{11}} + \frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} - \frac{9}{\sqrt{13}+2}$ .

5.36. Спростити вираз  $\left(\frac{1}{x^2} - x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^2+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^2-1}\right)$ .

5.37. Спростити вираз  $\left(\frac{a^{0,5}+2}{a^{0,5}-2} + \frac{a^{0,5}-2}{a^{0,5}+2} - \frac{16}{a-4}\right)^4$ .



5.38. Обчислити:  $\sqrt{27+2\sqrt{50}} \cdot (5-\sqrt{2})$ .

5.39. Спростити вираз  $\left(\sqrt{a} + \frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \left(\frac{a}{\sqrt{ab}+b} + \frac{b}{\sqrt{ab}-a} - \frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$  і знайти його значення,

якщо  $a = 2\frac{1}{4}$ ,  $b = 25$ .

5.40. Обчислити:  $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ .

5.41. Обчислити:  $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ .

5.42. Спростити вираз  $\sqrt[3]{28-16\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ .

## ТЕМА 6. ЛОГАРИФМІЧНІ ТА ПОКАЗНИКОВІ ВИРАЗИ

**Логарифмом** додатного числа  $b$  за основою  $a$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) називають показник степеня, до якого треба піднести основу  $a$ , щоб отримати число  $b$ . Тобто якщо  $a^x = b$  і  $a > 0, a \neq 1$ , то  $\log_a b = x$  і, навпаки, якщо  $\log_a b = x$ , то  $a^x = b$ . Наприклад,  $\log_3 81 = 4$ , бо  $3^4 = 81$ .

Логарифм за основою 10 називають **десятковим**. Записують:  $\log_{10} x = \lg x$ .

Логарифм за основою  $e \approx 2,718281828459045\dots$  називають **натуральним**. Записують:  $\log_e x = \ln x$ .

*Основна логарифмічна тотожність:*  $a^{\log_a b} = b$ .

*Основні властивості логарифмів* ( $a > 0, a \neq 1, b > 0, x > 0, y > 0, k \neq 0$ ):

- $\log_a 1 = 0$ ;
- $\log_a a = 1$ ;
- $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ ;
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ;
- $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$ ;
- $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \cdot \log_a x$ ;
- $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}, (x \neq 1)$ .

Формула переходу до нової основи:  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ .

**Приклад 1.** Обчислити:  $4^{\frac{\log_2 9 - 2}{\log_{\sqrt{2}} 2}}$ .

$$\blacksquare 4^{\frac{\log_2 9 - 2}{\log_{\sqrt{2}} 2}} = 4^{\log_2 9 - 2 \log_2 \sqrt{2}} = 4^{\log_2 9 - \log_2 (\sqrt{2})^2} = 4^{\log_2 9 - \log_2 2} = 4^{\log_2 (9:2)} = 4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = 2^{2 \cdot \log_2 3} = 2^{\log_2 9} = 9. \blacksquare$$

**Приклад 2.** Обчислити числове значення виразу  $\log_{\sqrt{3}} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} \right)$ .

А	Б	В	Г	Д
0	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{\pi^2}{49}$

$$\blacksquare \log_{\sqrt{3}} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} \right) = \log_{\sqrt{3}} 1 = 0.$$

Відповідь. А.  $\blacksquare$

**Приклад 3.** Знайти значення виразу  $\log_{20}5 + \log_{20}4 + 2$ .

А	Б	В	Г	Д
11	2	3	22	51

■  $\log_{20}5 + \log_{20}4 + 2 = \log_{20}(5 \cdot 4) + 2 = \log_{20}20 + 2 = 1 + 2 = 3$ .

Відповідь. В. ■

**Приклад 4.** Обчислити значення виразу  $\log_2 \sin \frac{\pi}{12} + \log_2 \sin \frac{\pi}{6} + \log_2 \sin \frac{5\pi}{12}$ .

А	Б	В	Г	Д
$2^{-3}$	3	-3	$-\frac{2}{3}$	Не існує

$$\begin{aligned} \log_2 \sin \frac{\pi}{12} + \log_2 \sin \frac{\pi}{6} + \log_2 \sin \frac{5\pi}{12} &= \log_2 \left( \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} \right) = \log_2 \left( \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \right) = \\ &= \log_2 \left( \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) = \log_2 \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) = \log_2 \left( \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \log_2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \log_2 (2^{-3}) = -3. \end{aligned}$$

Відповідь. В. ■

**Приклад 5.** Між якими послідовними цілими числами міститься значення виразу  $\log_2 0,1$ ?

А	Б	В	Г	Д
$-4 \text{ і } 0$	$3 \text{ і } 4$	Інша відповідь	$0 \text{ і } 1$	$-4 \text{ і } -3$

■ Функція  $y = \log_2 x$  — зростаюча.  $\frac{1}{16} < 0,1 = \frac{1}{10} < \frac{1}{8}$  або  $2^{-4} < 0,1 < 2^{-3}$ . Тоді  $\log_2 2^{-4} < \log_2 0,1 < \log_2 2^{-3}$ ;  $-4 < \log_2 0,1 < -3$ .

Відповідь. Д. ■

**Завдання 6.1–6.23** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**6.1.** Вказати неправильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\log_2 16 = -4$	$\log_2 \frac{1}{16} = -4$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = \frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

**6.2.** Обчислити:  $5^{\log_5 7} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} + \log_7 1$ .

А	Б	В	Г	Д
6	7	8	$7\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{3}$

6.3. Спростити вираз  $\frac{3\lg 2 + 3\lg 5}{\lg 1300 - \lg 0,13}$ .

А	Б	В	Г	Д
0,6	0,7	0,65	0,75	0,5

6.4.  $\frac{\log_9 27 + \log_9 3}{\log_6 8 + \log_6 27} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
6	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$

6.5.  $\frac{\log_8 128 - \log_8 2}{\log_2 36 - \log_2 9} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{14}{3}$	2	16	3

6.6. Обчислити значення виразу  $\log_5 49 + 2\log_5 \frac{5}{7}$ .

А	Б	В	Г	Д
2	1	0	4	25

6.7. Знайти значення  $x$ , якщо  $\log_7 x = 2\log_7 6 - \log_7 12 + \log_7 15$ .

А	Б	В	Г	Д
39	7,5	15	$\frac{17}{4}$	45

6.8. Обчислити:  $\frac{\log_3 32}{\log_3 2} + \frac{\log_7 27}{\log_7 3}$ .

А	Б	В	Г	Д
15	8	25	54	64

6.9. Обчислити:  $8^{\log_2 3} + 9^{\log_3 4}$ .

А	Б	В	Г	Д
33	7	14	43	60

6.10. Обчислити:  $\log_8 16$ .

А	Б	В	Г	Д
8	2	$\frac{3}{4}$	12	$\frac{4}{3}$

6.11. Знайти  $\log_3 200$ , якщо  $\log_3 2 = a$ ,  $\log_3 5 = b$ .

А	Б	В	Г	Д
$3a + 2b$	$32ab$	$2a + 3b$	$3a + b$	$6(a + b)$

6.12. Обчислити:  $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \lg \operatorname{tg} 2^\circ \lg \operatorname{tg} 3^\circ \dots \lg \operatorname{tg} 88^\circ \lg \operatorname{tg} 89^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
89!	0,1	10	1	0

6.13. Обчислити:  $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 88^\circ + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
10	1	0	0,1	89!

6.14. Обчислити:  $7^{\log_2 3} - 3^{\log_2 7}$ .

А	Б	В	Г	Д
0	$\frac{7}{3}$	1	-1	2

6.15. Обчислити:  $\log_5 7 \cdot \log_4 125$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{6}$	1	6	$\frac{2}{3}$	1,5

6.16. Серед чисел  $\cos 2\pi$ ;  $\sqrt[3]{2}$ ;  $\log_2 0,25$ ;  $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ ;  $7^{-6}$  знайти найбільше.

А	Б	В	Г	Д
$\cos 2\pi$	$\sqrt[3]{2}$	$\log_2 0,25$	$\left(\frac{1}{3}\right)^5$	$7^{-6}$

6.17.  $7^{1+\log_7 2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
9	14	49	343	81

6.18.  $\log_{7+4\sqrt{3}}(7-4\sqrt{3}) = \dots$

А	Б	В	Г	Д
14	2	1	-1	-2

6.19.  $\log_7 \sqrt[3]{7 \cdot \sqrt[3]{7}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{7^{20}}$

6.20. Обчислити:  $\log_8 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 4$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3

6.21. Обчислити:  $\left( 2^{2+\frac{1}{\log_3 2}} + 25^{\frac{1}{2\log_3 5}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

А	Б	В	Г	Д
8	16	3	4	5

6.22. Обчислити:  $\left( 5^{\log_5(\sqrt{3}+8)} - 3^{\log_3(\sqrt{3}-8)^2} \right)^2$ .

А	Б	В	Г	Д
64	12	8	2	$65 - 16\sqrt{3}$

6.23. Обчислити:  $\log_n \log_n \sqrt[2008]{\sqrt[2008]{\dots \sqrt[2008]{n}}}$ .

А	Б	В	Г	Д
2008	-2008	1004	-1004	1

Завдання 6.24–6.34 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

6.24. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

- |                                     |              |
|-------------------------------------|--------------|
| 1 $2\lg 5 + \lg 4$                  | А 5          |
| 2 $\log_3 5 : \log_3 2$             | Б $\log_5 2$ |
| 3 $\log_a(a^2 + a) - \log_a(a + 1)$ | В 1          |
| 4 $2^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}}$    | Г $\log_2 5$ |
|                                     | Д $\log_2 4$ |

6.25. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

- |                           |                  |
|---------------------------|------------------|
| 1 $\log_{27} 81$          | А -4             |
| 2 $\log_3 \frac{1}{81}$   | Б $-\frac{1}{4}$ |
| 3 $\log_{81} 3$           | В $\frac{1}{4}$  |
| 4 $\log_{81} \frac{1}{3}$ | Г $\frac{3}{4}$  |
|                           | Д $\frac{4}{3}$  |

6.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

- |                                      |         |
|--------------------------------------|---------|
| 1 $\log_8 16$                        | А 0,(6) |
| 2 $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{32}$ | Б 0,75  |
| 3 $\log_{25} 125$                    | В 1,25  |
| 4 $\log_{27} 9$                      | Г 1,(3) |
|                                      | Д 1,5   |

6.27. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

- |                                       |         |
|---------------------------------------|---------|
| 1 $\log_5 \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ | А 0,3   |
| 2 $\log_2 \frac{4}{\sqrt[3]{2}}$      | Б 0,(3) |
| 3 $\log_5 \frac{5}{\sqrt[3]{25}}$     | В 1,3   |
| 4 $\log_3 3\sqrt[3]{3}$               | Г 1,(3) |
|                                       | Д 1,(6) |

6.28. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

- |  |                 |
|--|-----------------|
| 1 $\frac{\log_8 4 + \log_8 16}{\log_6 16 + \log_6 81}$         | А $\frac{1}{3}$ |
| 2 $\frac{\log_{12} 2 + \log_{12} 72}{\log_5 75 - \log_5 3}$    | Б $\frac{1}{2}$ |
| 3 $\frac{\log_5 75 - \log_5 3}{\log_4 32 + \log_4 128}$        | В $\frac{2}{3}$ |
| 4 $\frac{\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}}{\log_3 54 - \log_3 2}$ | Г 1             |
|  | Д $\frac{4}{3}$ |

6.29. Установити відповідність між логарифмічними виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

- |                           |      |
|---------------------------|------|
| 1 $4^{\log_2 5}$          | А 6  |
| 2 $5^{1+\log_5 2}$        | Б 8  |
| 3 $\sqrt{3^{-\log_3 64}}$ | В 10 |
| 4 $2^{2\log_4 12-1}$      | Г 12 |
|                           | Д 25 |

6.30. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

- |   |   |      |
|---|---|------|
| 1 | $\frac{\log_3 64}{\log_3 2} + \frac{\log_5 9}{\log_5 3}$                      | А 7  |
| 2 | $\frac{\log_4 625}{\log_4 5} + \frac{\log_7 128}{\log_7 2}$                   | Б 8  |
| 3 | $\frac{\log_5 49}{\log_5 7} + \frac{\log_3 \frac{1}{16}}{\log_3 \frac{1}{2}}$ | В 9  |
| 4 | $\frac{\lg 125}{\lg 5} + \frac{\log_3 16}{\log_3 2}$                          | Г 6  |
|   |   | Д 11 |

6.31. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

- |   |                                |        |
|---|--------------------------------|--------|
| 1 | $\log_3 7 \cdot \log_{49} 81$  | А 1,25 |
| 2 | $\log_5 8 \cdot \log_{16} 125$ | Б 1,5  |
| 3 | $\log_9 1000 \cdot \lg 3$      | В 1,75 |
| 4 | $\log_{81} 128 \cdot \log_2 3$ | Г 2    |
|   |                                | Д 2,25 |

6.32. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

- |   |   |                 |
|---|---|-----------------|
| 1 | $\log_8 6 \cdot \log_6 5 \cdot \log_5 4$            | А $\frac{5}{8}$ |
| 2 | $\log_{14} 8 \cdot \log_{15} 14 \cdot \log_{16} 15$ | Б $\frac{1}{7}$ |
| 3 | $\log_7 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log_{32} 7$         | В $\frac{2}{3}$ |
| 4 | $\lg 2 \cdot \log_{11} 10 \cdot \log_{128} 11$      | Г $\frac{3}{4}$ |
|   |   | Д $\frac{2}{5}$ |

6.33.  $\log_7 2 = a$ ,  $\log_7 3 = b$ . Установити відповідність між логарифмами чисел (1–4) та їх вираженням через  $a$  та  $b$  (А–Д).

- |   |              |                   |
|---|--------------|-------------------|
| 1 | $\log_7 1,5$ | А $\frac{1}{a+b}$ |
| 2 | $\log_7 4,5$ | Б $\frac{2b}{a}$  |
| 3 | $\log_6 7$   | В $2b - a$        |
| 4 | $\log_2 9$   | Г $\frac{1}{a-b}$ |
|   |              | Д $b - a$         |



6.34.  $\log_a b = 5$ . Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |                      |                 |
|----------------------|-----------------|
| 1 $\log_{ab} a$      | А 5,5           |
| 2 $\log_{ab} b$      | Б 3             |
| 3 $\log_b \sqrt{ab}$ | В $\frac{5}{6}$ |
| 4 $\log_a \sqrt{ab}$ | Г 0,6           |
|                      | Д $\frac{1}{6}$ |

Розв'яжіть завдання 6.35–6.46. Відповідь запишіть десятковим дробом.

6.35. Обчислити:  $\left( \left( \frac{1}{81} \right)^{-\log_3 2} + 4^{1+4\log_4 2} \right)^{\frac{1}{5\log_2 5}} : 100$ .

6.36. Обчислити:  $(25^{2-\log_5 75} + 7^{-\log_7 3}) \cdot 27$ .

6.37. Обчислити:  $3^{\frac{\log_3 5}{\log_5 3}} - 5^{\log_5 5} + 7^{\log_7 49}$ .

6.38. Обчислити:  $0,25^{\lg 0,5} \cdot 0,04^{\lg 0,5} + 81^{0,5\log_9 7} - 0,5 \cdot 27^{\frac{1}{\log_2 3}}$ .

6.39. Обчислити:  $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$ .

6.40. Обчислити:  $2^{\log_2^2 3} - 3^{\log_2 3} - 9^{\log_3 2}$ .

6.41. Обчислити:  $\log_{3+\sqrt{8}} (3-\sqrt{8}) + \log_{3-\sqrt{8}} (3+\sqrt{8})$ .

6.42. Обчислити:  $3 \cdot 7^{2(\log_{\sqrt{5}} 7)^{-1} + \frac{1}{3}\log_7 8} - 3 \cdot \log_9 \sqrt[4]{9^3 \sqrt{9}} - 10$ .

6.43. Обчислити:  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5} \cdot \dots \cdot \log_{\frac{1}{99}} \frac{1}{100} \cdot \lg 2$ .

6.44. Дано:  $\log_{ab} a = 9$ . Знайти  $\log_{ab} b$ .

6.45. Спростити вираз  $a^{\frac{\log_b (\log_b a)}{\log_b a}} \cdot \log_a b$ .

6.46. Обчислити:  $(\log_5 2 + \log_2 5 + 2)(\log_5 2 - \lg 2) \cdot \log_2 5 - \log_5 2$ .

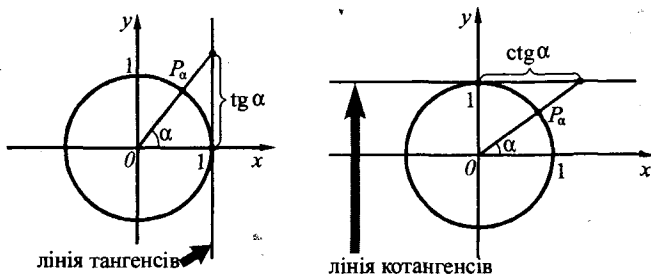
## ТЕМА 7. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ВИРАЗИ

**Синусом** кута  $\alpha$  ( $\sin\alpha$ ) називають ординату точки  $P_\alpha$  одиничного кола, яка відповідає куту  $\alpha$ .

**Косинусом** кута  $\alpha$  ( $\cos\alpha$ ) називають абсцису точки  $P_\alpha$  одиничного кола, яка відповідає куту  $\alpha$ .

**Тангенсом** кута  $\alpha$  ( $\operatorname{tg}\alpha$ ) називають відношення синуса цього кута до його косинуса:  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ . Пряму, яка проходить через точку  $P_0(1; 0)$  паралельно до осі ординат, називають **лінією тангенсів**.  $\operatorname{tg}\alpha$  — це ордината точки перетину прямої  $OP_\alpha$  з лінією тангенсів.

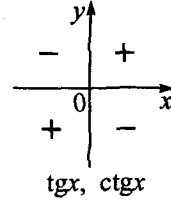
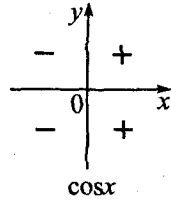
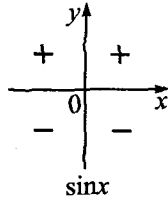
**Котангенсом** кута  $\alpha$  ( $\operatorname{ctg}\alpha$ ) називають відношення косинуса цього кута до його синуса:  $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ . Пряму, яка проходить через точку  $(0; 1)$  паралельно осі абсцис, називають **лінією котангенсів**.  $\operatorname{ctg}\alpha$  — це абсциса точки перетину прямої  $OP_\alpha$  з лінією котангенсів.



Значення синуса, косинуса, тангенса та котангенса деяких кутів:

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Знаки тригонометричних функцій у чвертях:



Функції  $y = \sin x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$  — непарні, а функція  $y = \cos x$  — парна, тому:  
 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ;  $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ ;  $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ ;  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ .

*Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.*

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  — основна тригонометрична тотожність

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha =$	—	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\cos \alpha =$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	—	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha =$	$\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	—	$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha =$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	—

*Формули додавання для тригонометричних функцій.*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta; \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}; \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}.$$

*Формули суми та різниці тригонометричних функцій.*

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}; \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

**Формули тригонометричних функцій подвійного аргументу.**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 ;$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} ;$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} .$$

**Формули половинного аргументу.**

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} ;$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} ;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} ;$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} .$$

**Формули пониження степеня.**

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} ;$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} .$$

**Формули добутку тригонометричних функцій.**

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} ;$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2} ;$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2} .$$

**Формули зведення.**

	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
$\sin x$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos x$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

**Приклад 1.** Спростити вираз  $\frac{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}$ .

$$\blacksquare \frac{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{-2 \sin 30^\circ \sin(-10^\circ)}{\frac{\sin 30^\circ}{\cos 10^\circ \cos 20^\circ}} = \frac{2 \sin 30^\circ \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ}{\sin 30^\circ} =$$

$$= 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ = \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \frac{1}{2} \sin 40^\circ. \blacksquare$$

**Приклад 2.** Обчислити:  $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$ .

$$\blacksquare \sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) \cdot \sin 15^\circ = \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}. \blacksquare$$

**Приклад 3.** Обчислити числові значення виразу  $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{5}{12}\pi$	$-2\frac{5}{12}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$

$$\blacksquare \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - 3 \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{-2\pi + 3\pi + 6\pi}{12} = \frac{7}{12}\pi.$$

Відповідь. Г. ■

**Приклад 4.** Знайти  $\operatorname{tg} \alpha$ , якщо  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$  і  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ .

А	Б	В	Г	Д
0,5	2	-0,5	-2	5

$$\blacksquare \text{Кут } \alpha \text{ міститься у четвертій чверті, тому } \sin \alpha < 0. \text{ Обчислимо } \sin \alpha: \sin \alpha =$$

$$= -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}. \text{ Знайдемо } \operatorname{tg} \alpha: \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -2.$$

Відповідь. Г. ■

**Приклад 5.** Знайти значення виразу  $2 \sin^2 2\alpha + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2 \cos^2 2\alpha$ , якщо  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .

А	Б	В	Г	Д
5	$2 + \sqrt{3}$	3	$2 - \sqrt{3}$	1

$$\blacksquare \text{Спочатку спростимо вираз: } 2 \sin^2 2\alpha + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2 \cos^2 2\alpha = 2 \sin^2 2\alpha + 2 \cos^2 2\alpha + 2 \sin \alpha =$$

$$= 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2 \sin \alpha = 2 + 2 \sin \alpha. \text{ Якщо } \alpha = \frac{\pi}{6}, \text{ то } 2 + 2 \sin \alpha = 2 + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Відповідь. В. ■

Завдання 7.1–7.26 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

7.1.  $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-2\sin^2\alpha$	1	$2\cos^2\alpha$	$2\sin^2\alpha$	0

7.2.  $\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\beta + 2 - \frac{1}{\cos^2\beta} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{\sin^2\beta}$	$\sin^2\beta$	$\frac{1}{\sin^2\beta}$	1	$\frac{2}{\sin^2\beta}$

7.3. Спростити вираз  $\operatorname{ctg}(-\alpha) \cdot \operatorname{tg}(-\alpha) - \sin^2(-\alpha)$ .

А	Б	В	Г	Д
$\cos\alpha$	$\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha$	$1 + \sin^2\alpha$	$-\cos^2\alpha$

7.4. Обчислити  $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$ , якщо  $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$ .

А	Б	В	Г	Д
2	1	4	3	-2

7.5. Обчислити  $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ , якщо  $\operatorname{tg}\alpha = 3$ .

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2

7.6. Знайти значення виразу  $3\sin^2\alpha - 7\cos^2\alpha$ , якщо  $\cos\alpha = -0,1$ .

А	Б	В	Г	Д
2	2,9	3,1	3,96	2,92

7.7. Знайти значення виразу  $\cos\left(\alpha - \beta + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin(\alpha + \pi)\cos(\beta - \pi)$ , якщо  $\alpha = 0,1\pi$ ,  $\beta = 0,15\pi$ .

А	Б	В	Г	Д
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

7.8.  $\operatorname{tg}7^\circ\operatorname{tg}83^\circ + \operatorname{tg}19^\circ\operatorname{tg}71^\circ = \dots$

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

7.9.  $\frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\sin\beta} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
1	$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$	$\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$	$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$

7.10.  $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}(x+y)} + \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}(x-y)} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
2	0	1	$2\operatorname{tg}x$	$2\operatorname{tg}(x+y)$

7.11.  $\sin(\pi - 2\alpha) + 2\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\sin 2\alpha$	1	$3\cos 2\alpha$	3	0

7.12.  $\cos^4 \frac{\alpha}{2} - \sin^4 \frac{\alpha}{2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \frac{\alpha}{4}$	$\cos 2\alpha$	1

7.13.  $\frac{\sin 40^\circ}{2\cos^2 20^\circ} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\cos 20^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\sin 20^\circ$	$\operatorname{ctg} 20^\circ$	$\operatorname{tg} 20^\circ$

7.14.  $\sin 48^\circ + \sin 12^\circ = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\sin 36^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 18^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cos 18^\circ$

7.15.  $\cos 70^\circ - \cos 10^\circ = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-\sin 40^\circ$	$\sin 40^\circ$	$\cos 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$2\sin 40^\circ$

7.16.  $\cos 70^\circ + \cos 50^\circ = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$2\cos 10^\circ$	$\sin 10^\circ$	$\cos 10^\circ$

7.17. Знайти значення виразу  $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ , якщо  $x = -\frac{\pi}{6}$ .

А	Б	В	Г	Д
0,5	-0,25	-0,5	-2	0,25

7.18.  $\cos 75^\circ \cos 15^\circ = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

7.19.  $\sin 105^\circ \cos 15^\circ = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

7.20.  $\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$

7.21.  $\sin\left(\arccos \frac{1}{4}\right) = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$

7.22.  $\cos\left(2\arcsin \frac{1}{6}\right) = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{17}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{15}{16}$

7.23.  $\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\arcsin 0,6\right) = \dots$

А	Б	В	Г	Д
0,3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$

7.24. Обчислити:  $3\sqrt{3} \cos(\operatorname{arctg} \sqrt{2})$ .

А	Б	В	Г	Д
3	-3	$\pm 3$	$3\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$

7.25.  $16 \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
0,5	-0,5	2	-2	0

7.26.  $\sin \frac{3\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{14} - \sin \frac{5\pi}{14} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	-1



Завдання 7.27–7.39 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

7.27. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

- |  |                              |
|--|------------------------------|
| 1 $\sin \alpha \cos \alpha$                  | А $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$ |
| 2 $1 - 2\sin^2 \alpha$                       | Б $-\cos 2\alpha$            |
| 3 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$ | В $\cos 2\alpha$             |
| 4 $\cos(\pi - 2\alpha)$                      | Г $2\cos \alpha$             |
|  | Д $\sin 2\alpha$             |

7.28. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм дорівнюють (А–Д).

- |                                  |                     |
|----------------------------------|---------------------|
| 1 $\sin 740^\circ$               | А $\cos 50^\circ$   |
| 2 $\cos 560^\circ$               | Б $\sin 50^\circ$   |
| 3 $\cos 225^\circ$               | В $\sin 20^\circ$   |
| 4 $2\sin 20^\circ \cos 20^\circ$ | Г $\sin(-45^\circ)$ |
|                                  | Д $-\cos 20^\circ$  |

7.29. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

- |                             |   |
|-----------------------------|---|
| 1 $\sin(45^\circ + \alpha)$ | А $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)$       |
| 2 $\cos(45^\circ + \alpha)$ | Б $\cos \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha$ |
| 3 $\cos 3\alpha$            | В $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$       |
| 4 $\sin 3\alpha$            | Г $\cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha$ |
|                             | Д $\sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$ |

7.30. Одна зі сторін кута збігається з додатною піввіссю абсцис, а інша перетинає одиничне коло в точці  $\left(-\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}\right)$ . Установити відповідність між тригонометричними функціями кута  $\beta$  (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |                              |                    |
|------------------------------|--------------------|
| 1 $\sin \beta$               | А $\frac{5}{12}$   |
| 2 $\cos \beta$               | Б $\frac{12}{5}$   |
| 3 $\operatorname{tg} \beta$  | В $-\frac{12}{13}$ |
| 4 $\operatorname{ctg} \beta$ | Г $-\frac{5}{13}$  |
|                              | Д $\frac{13}{12}$  |

7.31.  $\sin \alpha = a$ ,  $\alpha$  — кут I чверті. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

А  $a$

2  $\sin(\pi - \alpha)$

Б  $-a$

3  $\sin(\pi + \alpha)$

В  $\frac{1}{a}$

4  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

Г  $-\sqrt{1-a^2}$

Д  $\sqrt{1-a^2}$

7.32.  $\beta$  — кут першої чверті,  $\operatorname{tg} \beta = b$ . Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

А  $\sqrt{1-a^2}$

2  $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

Б  $a$

3  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$

В  $\frac{1}{a}$

4  $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$

Г  $-a$

Д  $-\frac{1}{a}$

7.33. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1  $\sin 510^\circ$

А  $-\frac{1}{2}$

2  $\cos 690^\circ$

3  $\cos 840^\circ$

4  $\sin 960^\circ$

Б  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

В  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Г  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Д  $\frac{1}{2}$

7.34. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1  $\operatorname{tg} \frac{20\pi}{3}$

А  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

2  $\operatorname{tg} \frac{28\pi}{3}$

Б  $-\sqrt{3}$

3  $\operatorname{tg}\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$

В  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

4  $\operatorname{ctg} \frac{16\pi}{3}$

Г  $\sqrt{3}$

Д  $-1$

7.35. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

- |                                     |              |
|-------------------------------------|--------------|
| 1 $\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x$ | А $\sin 4x$  |
| 2 $\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$ | Б $-\cos 4x$ |
| 3 $\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x$ | В $\cos 4x$  |
| 4 $\sin x \cos 3x - \sin 3x \cos x$ | Г $\cos 2x$  |
|                                     | Д $-\sin 2x$ |

7.36.  $\alpha$  — кут другої чверті,  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Установити відповідність між заданими тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |                                |                      |
|--------------------------------|----------------------|
| 1 $\sin 2\alpha$               | А $-\frac{119}{120}$ |
| 2 $\cos 2\alpha$               | Б $-\frac{119}{169}$ |
| 3 $\operatorname{tg} 2\alpha$  | В $\frac{119}{169}$  |
| 4 $\operatorname{ctg} 2\alpha$ | Г $-\frac{120}{119}$ |
|                                | Д $-\frac{120}{169}$ |

7.37. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 1 $\frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\cos 3\alpha - \cos \alpha}$   | А $\operatorname{tg} \alpha$    |
| 2 $\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha}$   | Б $\operatorname{ctg} \alpha$   |
| 3 $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}$ | В $\operatorname{tg} 2\alpha$   |
| 4 $\frac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha}$   | Г $\operatorname{ctg} 2\alpha$  |
|   | Д $-\operatorname{ctg} 2\alpha$ |

7.38. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

- |                                   |                             |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1 $\sin 10^\circ + \cos 20^\circ$ | А $\sin 50^\circ$           |
| 2 $\sin 20^\circ + \cos 10^\circ$ | Б $\sin 40^\circ$           |
| 3 $\cos 20^\circ - \sin 10^\circ$ | В $\sqrt{3} \sin 40^\circ$  |
| 4 $\cos 10^\circ - \sin 20^\circ$ | Г $\sqrt{3} \sin 50^\circ$  |
|                                   | Д $-\sqrt{3} \sin 50^\circ$ |

7.39. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1-4) та їх значеннями (А-Д).

1  $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$  А  $\frac{4}{5}$

2  $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$  Б  $\frac{3}{5}$

3  $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$  В  $\frac{3}{4}$

4  $\sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$  Г  $\frac{4}{3}$

Д  $-\frac{3}{5}$

Розв'яжіть завдання 7.40–7.49. Відповідь запишіть десятковим дробом.

7.40. Обчислити: 
$$\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos(\alpha - \pi)\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin(\alpha - \pi)\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)}$$

7.41. Спростити:  $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ .

7.42. Спростити:  $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha$ .

7.43. Спростити:  $\frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} \cdot 2\operatorname{ctg}\alpha$ .

7.44. Спростити:  $\frac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{5\cos\alpha \cdot (\cos\alpha + \cos 2\alpha)}$ .

7.45. Спростити:  $\left(\sin(2\pi - x)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \cos(x - \pi) - \sin(x - \pi)\right)^2 + \cos^2(\pi - x)$ .

7.46. Обчислити:  $2\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ$ .

7.47. Обчислити:  $\frac{1}{\cos 1 + \cos 3} + \frac{1}{\cos 1 + \cos 5} + \frac{1}{\cos 1 + \cos 7} + \dots + \frac{1}{\cos 1 + \cos 2001} + \frac{\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 1001}{2\sin 1}$ .

7.48. Спростити вираз  $\frac{\cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha}{\cos^5\alpha}$ .

7.49. Спростити вираз  $26\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}\right)$ .

## ТЕМА 8. ЦІЛІ РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

**Лінійні рівняння з однією змінною.**

**Лінійним рівнянням з однією змінною** називають рівняння виду  $ax = b$ , де  $x$  — змінна,  $a$  та  $b$  — відомі числа.

- Якщо  $a \neq 0$ , то  $x = \frac{b}{a}$  — єдиний корінь лінійного рівняння;
- якщо  $a = 0, b \neq 0$ , то  $0 \cdot x = b$  і рівняння коренів не має;
- якщо  $a = 0, b = 0$ , то  $0 \cdot x = 0$  і коренями рівняння є всі дійсні числа.

Рівняння, які зводяться до лінійних, як правило, мають один корінь. Проте є випадки, коли такі рівняння не мають коренів взагалі або їх коренями є довільні числа, наприклад:

$$2x - 2(x - 3) = 10;$$

$$2x - 2x + 6 = 10;$$

$$0x = 4.$$

$$2x + 2(x - 3) = 10;$$

$$2x + 2x - 6 = 10;$$

$$4x = 16;$$

$$x = 4.$$

$$2x - 2(x - 5) = 10;$$

$$2x - 2x + 10 = 10;$$

$$0x = 0.$$

Відповідь. Коренів немає.

Відповідь. 4.

Відповідь. Довільне число.

**Квадратні рівняння.**

**Квадратним рівнянням** (рівнянням другого степеня з однією змінною) називають рівняння виду  $ax^2 + bx + c = 0$ , де  $x$  — змінна,  $a, b, c$  — відомі числа, причому  $a \neq 0$ . Вираз  $b^2 - 4ac$  називають **дискримінантом квадратного рівняння** і позначають літерою  $D$ . Кількість коренів квадратного рівняння залежить від значення дискримінанта.

Умова	Розв'язки
$D = b^2 - 4ac > 0$	Рівняння має два корені: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ .
$D = b^2 - 4ac = 0$	Рівняння має один корінь: $x = \frac{-b}{2a}$ .
$D = b^2 - 4ac < 0$	Рівняння не має коренів.

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння  $4x + 3x^2 = 7$ .

■ Запишемо рівняння у стандартному вигляді:  $3x^2 + 4x - 7 = 0$ .

Обчислимо значення дискримінанта:  $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 16 + 84 = 100$ .

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 + 10}{6} = \frac{6}{6} = 1; \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 - 10}{6} = \frac{-14}{6} = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}.$$

Відповідь.  $-2\frac{1}{3}; 1$ . ■

Квадратне рівняння, у якому перший коефіцієнт дорівнює одиниці ( $a = 1$ ), називають **зведеним**. Другий коефіцієнт та вільний член зведеного квадратного рівняння позначають відповідно  $p$  та  $q$ , і рівняння має вигляд  $x^2 + px + q = 0$ .

**Теорема Вієта.** Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів — вільному члену. Тобто якщо  $x_1$  та  $x_2$  — корені рівняння  $x^2 + px + q = 0$ , то:  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 \cdot x_2 = q$ .

**Бікватратним рівнянням** називають рівняння виду  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , де  $x$  — змінна,  $a, b, c$  — відомі числа, до того ж  $a \neq 0$ . Заміною  $x^2 = t$  бікватратне рівняння зводять до квадратного.

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння  $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$ .

■ Зробимо заміну  $x^2 = t$ .

Тоді  $x^4 = (x^2)^2 = t^2$ . Отримуємо рівняння  $t^2 - 6t - 7 = 0$ . Корені цього рівняння  $t_1 = 7$ ,  $t_2 = -1$ . Повертаємося до змінної  $x$ :

$$x^2 = 7; x_{1,2} = \pm\sqrt{7}, \quad \text{або} \quad x^2 = -1; \text{ коренів немає.}$$

Відповідь.  $-\sqrt{7}; \sqrt{7}$ . ■

**Приклад 3.** Обчислити відношення меншого кореня квадратного рівняння  $x^2 + 5x - 6 = 0$  до його більшого кореня.

А	Б	В	Г	Д
6	-6	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{2}$

■ Знайдемо корені рівняння  $x^2 + 5x - 6 = 0$ ;  $x_1 = -6$ ,  $x_2 = 1$ . Оскільки  $x_1 < x_2$ , то  $x_1 : x_2 = -6 : 1 = -6$ . Зверніть увагу, що буде помилкою, якщо знайти відношення  $1 : (-6) = -\frac{1}{6}$ , бо 1 — це корінь з меншим модулем, але не менший корінь.

Відповідь. Б. ■

**Завдання 8.1–8.24** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**8.1.** Розв'язати рівняння  $ax + b = c$ , де  $a \neq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{a}{b-c}$	$x = \frac{a}{c-b}$	$x = \frac{b-c}{a}$	$x = \frac{c-b}{a}$	$x = \frac{c+b}{a}$

**8.2.** Розв'язати рівняння  $\frac{1}{7}x - 2 = 0$  і  $-0,2x = 4$  та записати добуток їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
-70	$-\frac{1}{70}$	-28	280	-280

**8.3.** Розв'язати рівняння  $|x - 1| = 3$  та знайти суму його коренів.

А	Б	В	Г	Д
0	4	2	-2	-4

8.4. Знайти дискримінант рівняння  $3x^2 - 2x - 5 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
64	-64	8	-31	49

8.5. Знайти суму коренів рівняння  $2x^2 - 5x - 7 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
5	-2,5	2,5	-7	-3,5

8.6. Скласти зведене квадратне рівняння з коренями  $\sqrt{2}$  і  $\sqrt{8}$ .

А	Б	В	Г	Д
$x^2 - 3\sqrt{2}x + 16 = 0$	$x^2 - 4x + 3\sqrt{2} = 0$	$x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0$	$x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$	Скласти неможливо

8.7. Знайти суму цілих чисел, що належать відрізьку, кінцями якого є корені квадратного рівняння  $10x^2 + 7x - 12 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
-2	-1	0	1	-5

8.8. Скільки коренів має рівняння  $|x^2 - 3x + 2| = 2$ ?

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

8.9. У першій пачці зошитів було удвічі більше, ніж у другій. Коли з другої пачки переклали до першої 10 зошитів, то в другій стало в 4 рази менше зошитів, ніж у першій. Скільки зошитів було у другій пачці?

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо кількість зошитів у другій пачці позначено через  $x$ ?

А	Б	В	Г	Д
$2x = 4(x - 10)$	$4(2x + 10) = x - 10$	$2x + 10 = 4x - 10$	$2x + 10 = 4(x - 10)$	$x + 2 + 10 = 4(x - 10)$

8.10. Одну й ту ж відстань один автомобіль проїхав за 3 год, а інший — за 2 год. Знайти швидкість руху автомобіля, який їхав повільніше, якщо його швидкість на 24 км/год менша від швидкості іншого автомобіля.

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо шукану швидкість позначено через  $x$  км/год?

А	Б	В	Г	Д
$3(x - 24) = 2x$	$3(x + 24) = 2x$	$3x = 2(x + 24)$	$\frac{x}{3} = \frac{x + 24}{2}$	$3x = 2x + 24$

8.11. У першості з волейболу було зіграно 21 матч, при цьому кожна команда зіграла з іншою по одному разу. Скільки команд брало участь у першості?

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо кількість команд позначено через  $x$ ?

А	Б	В	Г	Д
$x(x + 1) = 2$	$\frac{x(x - 1)}{2} = 21$	$\frac{x(x + 1)}{2} = 21$	$x + x - 1 = 21$	$x(x - 1) = 21$

8.12. За якої умови рівняння  $ax + b = cx + d$  не має коренів?

А	Б	В	Г	Д
$a = 0, c \neq 0$	$a \neq c, d \neq b$	$a \neq c, d = b$	$a = c, d \neq b$	$a = c, d = b$

8.13. Коренем рівняння  $kx = 3$  є число 0,2. Знайти корінь рівняння  $kx = -1$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{15}$	15	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$

8.14. Знайти значення параметра  $a$ , за якого рівняння  $(a^2 - 1)x = a^2 + 5a - 6$  має безліч коренів.

А	Б	В	Г	Д
1	$\pm 1$	-6; 1	-6; $\pm 1$	0

8.15. За якого значення  $a$  рівняння  $a^2x - 2a^2 = 49x + 14a$  має єдиний корінь?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -7)$	$(7; +\infty)$	$(-\infty; -7) \cup (7; +\infty)$	$(-7; 7)$	$(-\infty; -7) \cup (-7; 7) \cup (7; +\infty)$

8.16. За якого значення  $t$  значення виразу  $-0,3t + 18$  на 5 більше від значення виразу  $0,1t + 17$ ?

А	Б	В	Г	Д
-16,25	16,25	30	55	-30

8.17. Знайти суму коренів рівняння  $|4x - 8| + |2 - x| = 4$ .

А	Б	В	Г	Д
2,8	1,2	1,6	4	3

8.18. Знайти корінь рівняння  $|x - 1| + |x + 3| = 6,2$ , який належить проміжку  $(-\infty; -3)$ .

А	Б	В	Г	Д
-4,1	-2,1	-4	-5	-6

8.19. Вказати всі значення  $a$ , за яких рівняння  $|x - 5| - 1 = a$  має два корені.

А	Б	В	Г	Д
$a > 5$	$a < 4$	$a > 1$	$a \geq -1$	$a > -1$

8.20. Знайти всі значення  $a$ , за яких один з коренів рівняння  $x^2 + 2ax + a^2 = 0$  дорівнює -2.

А	Б	В	Г	Д
$a = \pm 2$	$a = 2$	$a = 4$	$a = \pm 4$	$a = -2$

8.21. За яких значень  $m$  рівняння  $4x^2 + 2x - m = 0$  має тільки один корінь?

А	Б	В	Г	Д
0,5	-0,5	0,25	-0,25	$\pm 0,25$

8.22. Знайти всі значення  $c$ , за яких рівняння  $3x^2 - 2x + c = 0$  має хоча б один спільний корінь з рівнянням  $x^2 + x - 2 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$c = -5, c = -1,6$	$c = 8, c = 1$	$c = -16, c = -1$	$c = 8, c = -1$	$c = 5, c = 1,6$



8.23.  $x_1$  та  $x_2$  — корені рівняння  $x^2 - 3x - 5 = 0$ . Не розв'язуючи рівняння, знайти  $x_1^2 + x_2^2$ .

А	Б	В	Г	Д
-1	19	4	-4	-19

8.24. Скільки коренів має рівняння  $x^2 - 7|x| + 10 = 0$ ?

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

Завдання 8.25–8.34 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

8.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1  $ax + b = c, a \neq 0$

2  $ax - b = c, a \neq 0$

3  $ax - b + c = 0, a \neq 0$

4  $ax + b + c = 0, a \neq 0$

А  $\frac{a}{c+b}$

Б  $\frac{c+b}{a}$

В  $\frac{-c-b}{a}$

Г  $\frac{b-c}{a}$

Д  $\frac{c-b}{a}$

8.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх розв'язків (А–Д).

1  $5x - 0, (3) = 5x - \frac{1}{3}$

2  $5x - 2 = 5x + 2$

3  $|5x - 2| = 2$

4  $5x - 2 = 2$

А Жодного

Б Один

В Два

Г Три

Д Безліч

8.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1  $7x + 2 = 5x + 6$

2  $7x - 2 = 6 - 5x$

3  $7x - 2 = -6 - 5x$

4  $7x + 6 = -6 - 5x$

А  $-\frac{1}{3}$

Б -1

В 0

Г  $\frac{2}{3}$

Д 2

8.28. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1  $x^2 - 4x = 0$

2  $2x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$

3  $-x^2 + 2x + 1,5 = 0$

4  $x^2 - \sqrt{5}x - 2 = 0$

А  $\frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$

Б  $\frac{3 \pm \sqrt{11}}{4}$

В 0; 4

Г  $\frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{13}}{2}$

Д  $\frac{2 + \sqrt{10}}{2}; \frac{3 + \sqrt{11}}{4}$

8.29. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1  $x^2 - 4x + 3 = 0$

2  $x^2 + 2x - 3 = 0$

3  $x^2 + 4x + 3 = 0$

4  $x^2 - 2x - 3 = 0$

А  $\emptyset$

Б  $\{-1; -3\}$

В  $\{-1; 3\}$

Г  $\{-3; 1\}$

Д  $\{1; 3\}$

8.30. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1  $x^2 - 6x + 1 = 0$

2  $x^2 - 6x - 1 = 0$

3  $x^2 - 6x + 2 = 0$

4  $x^2 - 6x + 4 = 0$

А  $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$

Б  $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10}$

В  $x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$

Г  $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{11}$

Д  $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{7}$

8.31. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д), якщо  $x_1$  та  $x_2$  — корені квадратного рівняння  $x^2 - 5x - 4 = 0$ .

1  $x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2$

2  $x_1^2 + x_2^2$

3  $(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2$

4  $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$

А -20

Б 1

В 33

Г 65

Д 17

8.32. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів (А–Д).

1  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

2  $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

3  $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

4  $x^5 + 5x^3 - 36x = 0$

А Жодного

Б Один

В Два

Г Три

Д Чотири

8.33. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

- |                  |                |
|------------------|----------------|
| 1 $ x - 3  = 4$  | А $\emptyset$  |
| 2 $ x - 4  = -3$ | Б $\{1; 7\}$   |
| 3 $ x + 4  = 3$  | В $\{-7; 1\}$  |
| 4 $ x + 3  = 4$  | Г $\{-7; -1\}$ |
|                  | Д $\{-1; 7\}$  |

8.34. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

- |                          |                        |
|--------------------------|------------------------|
| 1 $ 2x - 3  = 2x - 3$    | А $(-\infty; 1,5]$     |
| 2 $ 2x - 3  = -2x + 3$   | Б $(-\infty; +\infty)$ |
| 3 $ 2x - 3  = -x^2 - 1$  | В $[0; +\infty)$       |
| 4 $ -1 - x^2  = x^2 + 1$ | Г $[1,5; +\infty)$     |
|                          | Д $\emptyset$          |

Розв'яжіть завдання 8.35–8.49. Відповідь запишіть десятковим дробом.

8.35. Розв'язати рівняння  $\frac{x-2}{5} + \frac{2x-5}{4} + \frac{4x-1}{20} = 4-x$ .

8.36. За якого значення параметра  $a$  сума коренів рівняння  $x^2 - (a^2 - 17a + 83)x - 21 = 0$  буде найменшою?

8.37. Розв'язати рівняння  $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ . У відповідь записати найменший корінь.

8.38. Розв'язати рівняння  $x^3 + 9x^2 + 9x + 1 = 0$ . У відповідь записати суму коренів.

8.39. Розв'язати рівняння  $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$ . У відповідь записати найбільший корінь.

8.40. Розв'язати рівняння  $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$ . У відповідь записати добуток коренів.

8.41. Розв'язати рівняння  $|3x^2 - x| = 8 + x$ . У відповідь записати найбільший корінь.

8.42. Розв'язати рівняння  $|x + 1| + |x - 5| = 20$ . У відповідь записати модуль різниці коренів.

8.43. Батько старший від сина в 9 разів, а сума їхніх років дорівнює 30. Через скільки років батько стане старшим від сина удвічі?

8.44. У двоцифровому числі цифра десятків утричі більша, ніж цифра одиниць. Якщо від цього числа відняти число, записане цими ж цифрами, але у зворотньому порядку, то отримаємо 36. Знайти це число.

8.45. Розв'язати рівняння  $(x + 2)(x + 1)x(x - 1) = 24$ . У відповідь записати додатний корінь.

8.46. Розв'язати рівняння  $x^4 + (x - 4)^4 = 82$ . У відповідь записати найбільший корінь.

8.47. Розв'язати рівняння  $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$ . У відповідь записати найменший корінь.

8.48. Розв'язати рівняння  $\|x + 1| - |x - 3|\| = |x|$ . У відповідь записати суму коренів.

8.49. Розв'язати рівняння  $|x^2 - 9| + |x^2 - 16| = 7$ . У відповідь записати кількість цілих коренів.

## ТЕМА 9. ЦІЛІ РАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Два вирази, розділені одним із знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ , називають *нерівністю*.

Щоб розв'язати нерівність, її, як правило, замінюють рівносильною, але простішою.

**Основні властивості рівносильності нерівностей:**

- якщо доданок перенести з одної частини нерівності в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на вираз, який набуває лише додатних значень змінної (зокрема, на додатне число), то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на вираз, який набуває лише від'ємних значень (зокрема, на від'ємне число) і змінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

**Лінійні та квадратні нерівності.**

Нерівності виду  $ax + b \diamond 0$ , де  $a, b$  — числа,  $x$  — змінна,  $\diamond$  — один зі знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ , називають *лінійними*.

**Приклад 1.** Розв'язати нерівність  $12 - 7x \geq 33$ .

$$\blacksquare 12 - 7x \geq 33; -7x \geq 33 - 12; -7x \geq 21; x \leq -3.$$

Відповідь.  $(-\infty; -3]$ .  $\blacksquare$

Нерівності виду  $ax^2 + bx + c \diamond 0$ , де  $a, b, c$  — числа,  $a \neq 0$ ,  $x$  — змінна,  $\diamond$  — один зі знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ , називають *квадратними*. Наприклад,  $7x^2 + 3x - 11 \leq 0$ ,  $x^2 - 8 > 0$  — квадратні нерівності. Розв'язання квадратних нерівностей зводять до відшукування проміжків, на яких відповідна квадратична функція  $y = ax^2 + bx + c$  набуває додатних, від'ємних, невід'ємних, недодатних значень.

**Приклад 2.** Розв'язати нерівність  $x^2 - 5x - 14 \geq 0$ .

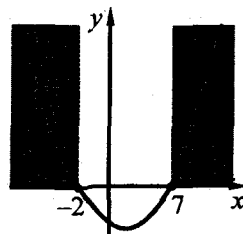
$\blacksquare$  Графіком квадратичної функції  $y = x^2 - 5x - 14$  є парабола, вітки якої напрямлені вгору (бо  $a = 1 > 0$ ).

Знайдемо нулі цієї функції.

$$x^2 - 5x - 14 = 0;$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 7.$$

Побудувавши схематичний графік функції, визначаємо, що вона набуває невід'ємних значень ( $y \geq 0$ ), якщо  $x \in (-\infty; -2] \cup [7; +\infty)$ . Ці проміжки і є розв'язками даної нерівності.



Відповідь.  $(-\infty; -2] \cup [7; +\infty)$ .  $\blacksquare$

**Раціональні нерівності. Метод інтервалів.**

Нерівності виду  $P(x) \diamond 0$ , де  $P(x)$  — многочлен,  $\diamond$  — один зі знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ , називають *раціональними*. Раціональними також називають нерівності, які набувають вказаного

вигляду після розкриття дужок та зведення подібних доданків. Наприклад,  $5x^3 - 4x^2 - 2x - 1 \geq 0$ ;  $x(x-7)^3(2x^2+9) > 0$  — раціональні нерівності. Лінійні та квадратичні нерівності є раціональними.

Якщо многочлен  $P(x)$  розкласти на множники, то раціональну нерівність зручно розв'язувати *методом інтервалів*:

- 1) визначити всі нулі многочлена  $P(x)$  (значення змінної, за яких  $P(x) = 0$ );
- 2) позначити нулі  $P(x)$  на числовій прямій;
- 3) визначити знак многочлена  $P(x)$  на кожному з утворених проміжків (для цього достатньо обчислити значення многочлена  $P(x)$  у довільній точці проміжку);
- 4) вибрати проміжки, на яких многочлен набуває значення того знака, якого вимагає нерівність, і записати множину розв'язків нерівності.

**Приклад 3.** Розв'язати методом інтервалів нерівність  $5x^2 - 7x \geq 12$ .

■  $5x^2 - 7x \geq 12$ ;  $5x^2 - 7x - 12 \geq 0$ .

Розкладемо на множники квадратний тричлен  $5x^2 - 7x - 12$ . Для цього знайдемо його корені:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2,5$ . Одержимо:  $5x^2 - 7x - 12 = 5(x+1)(x-2,4)$ . Тоді задана нерівність рівносильна такій:  $5(x+1)(x-2,4) \geq 0$ . Позначимо корені  $x_1, x_2$  на числовій прямій:



Визначимо знак тричлена на кожному з утворених проміжків:

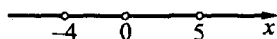


Отже, розв'язок нерівності —  $x \in (-\infty; -1] \cup [2,4; +\infty)$ .

Відповідь.  $(-\infty; -1] \cup [2,4; +\infty)$ . ■

**Приклад 4.** Розв'язати нерівність  $x(x+4)^2(x-5)^3(x^2+1) > 0$ .

■ Ліва частина нерівності дорівнює нулю, якщо  $x_1 = -4$ ;  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 5$ . Вираз  $(x^2+1)$  за довільних значень змінної додатний, тому, поділивши на нього обидві частини нерівності, отримаємо рівносильну нерівність до заданої:  $x(x+4)^2(x-5)^3 > 0$ . Позначимо  $x_1, x_2, x_3$  на числовій прямій:



Визначимо знак виразу  $x(x+4)^2(x-5)^3$  на кожному з чотирьох утворених проміжків.

Для цього обчислимо значення цього виразу у довільній точці кожного із проміжків:  $f(-5) = -5 \cdot (-1)^2 \cdot (-10)^3 > 0$ ;  $f(-1) = -1 \cdot 3^2 \cdot (-6)^3 > 0$ ;  $f(1) = 1 \cdot 5^2 \cdot (-4)^3 < 0$ ;  $f(6) = 6 \cdot 10^2 \cdot 1^3 > 0$ .



Отже, розв'язок нерівності:  $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (5; +\infty)$ .

Відповідь.  $(-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (5; +\infty)$ . ■

**Приклад 5.** Знайти найменший розв'язок нерівності  $(x+2)^2(x-1) \geq 2(x+2)^2$  на проміжку  $(-5; 5)$ .

А	Б	В	Г	Д
4	5	3	-2	2

■  $(x+2)^2(x-1) \geq 2(x+2)^2$ ;  $(x+2)^2(x-1) - 2(x+2)^2 \geq 0$ ;  $(x+2)^2(x-1-2) \geq 0$ ;  $(x+2)^2(x-3) \geq 0$ ;  
 $x-3 \geq 0$  або  $(x+2)^2 = 0$ ;  $x \geq 3$  або  $x = -2$ .

Відповідь. Г. ■

**Завдання 9.1–9.22** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**9.1.** Розв'язати нерівність  $-4x < 20$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 5)$	$(-\infty; -5)$	$(5; +\infty)$	$(-5; +\infty)$	$(-4; 20)$

**9.2.** Розв'язати нерівність  $\frac{x-1}{2} < 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$(5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$	$(-\infty; 3)$	$(3; +\infty)$	$(-\infty; 2\frac{1}{2})$

**9.3.** Розв'язати нерівність  $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} \leq 4$ .

А	Б	В	Г	Д
$[4; +\infty)$	$(-\infty; 4]$	$[24; +\infty)$	$(-\infty; 24)$	$(-\infty; 24]$

**9.4.** Розв'язати нерівність  $2 < x - 7 \leq 5$ .

А	Б	В	Г	Д
$(2; 12]$	$(-5; -2]$	$(9; 12]$	$(-5; 5]$	$(-12; 9]$

**9.5.** Розв'язати нерівність  $-3 \leq -x + 4 < 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$(2; 7]$	$[2; 7)$	$[1; 6)$	$[-3; -2)$	$(1; 6]$

**9.6.** Розв'язати нерівність  $(x+7)(x-3) < 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-3; 7)$	$(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$	$(-\infty; -7) \cup (3; +\infty)$	$(3; 7)$	$(-7; 3)$

**9.7.** Розв'язати нерівність  $x^2 + 7x - 30 \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-10; 3]$	$(-\infty; -10] \cup [3; +\infty)$	$(-\infty; -3] \cup [10; +\infty)$	$[-3; 10]$	$(-\infty; 3] \cup [10; +\infty)$

**9.8.** Розв'язати нерівність  $-x^2 + 3x + 10 > 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(2; 5)$	$(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$	$(-5; 2)$	$(-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$	$(-2; 5)$

9.9. Розв'язати нерівність  $x^2 > 10$ .

А	Б	В	Г	Д
$(\sqrt{10}; +\infty)$	$(-\sqrt{10}; \sqrt{10})$	$(-\sqrt{10}; +\infty)$	$(-\infty; -100) \cup$ $\cup (100; +\infty)$	$(-\infty; -\sqrt{10}) \cup$ $\cup (\sqrt{10}; +\infty)$

9.10. Розв'язати нерівність  $(x - 1)^2 < 16$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-5; 3)$	$(-4; 4)$	$(-3; 5)$	$(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$	$(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

9.11. Розв'язати нерівність  $(x - 3)(x + 5)(4 - x) \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5] \cup [3; 4]$	$[-5; 3] \cup [4; +\infty)$	$[-4; -3] \cup [5; +\infty)$	$(-\infty; -4] \cup [-3; 5]$	$(-\infty; 4]$

9.12. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності  $(2 - x)^3(x + 2)^2(x - 3) \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
2	$[2; 3]$	0	3	Безліч

9.13. Знайти множину розв'язків нерівності  $(x - 2)^2(x + 3) \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$	$(-\infty; -3]$	$[-3; 2]$	$(-\infty; -3] \cup \{2\}$	$(-\infty; -2] \cup \{3\}$

9.14. Розв'язати нерівність  $x(5 - x)^3 > 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(5; +\infty)$	$(-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$	$(-5; 0)$	$(0; 5)$

9.15. Скільки цілих розв'язків має нерівність  $-x - 5 < -3x < x - 1$ ?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	більше, ніж три

9.16. Розв'язати нерівність  $(x^2 - 3x - 10)(x - 1) > 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2) \cup (1; 5)$	$(-2; 1) \cup (5; +\infty)$	$(-5; -1) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -5) \cup (-1; 2)$	$(1; +\infty)$

9.17. Знайти множину розв'язків нерівності  $|x - 5| < 8$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -13) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; 13)$	$(-13; 3)$	$(-3; 13)$	$(-\infty; -3) \cup (13; +\infty)$

9.18. Розв'язати нерівність  $|x + 4| > 3$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -7) \cup (-1; +\infty)$	$(-7; -1)$	$(-1; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (7; +\infty)$	$(1; 7)$

9.19. Розв'язати нерівність  $|3x| < x + 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0,5)$	$(0,5; +\infty)$	$(-0,25; 0,5)$	$(-0,5; 0) \cup (0; 0,25)$	$(0,25; +\infty)$

9.20. За яких значень  $a$  розв'язком нерівності  $(a-3)x \leq 7$  є проміжок  $\left[\frac{7}{a-3}; +\infty\right)$ ?

А	Б	В	Г	Д
$a > 3$	$a \geq 3$	$a \neq 3$	$a < 3$	$a \leq 3$

9.21. Знайти значення параметра  $a$ , за якого розв'язками нерівності  $3x - 1 < ax + 5$  є усі дійсні числа.

А	Б	В	Г	Д
3	1	5	0	6

9.22. Знайти множину розв'язків нерівності  $(x-4)(a-x) \geq 0$ , якщо  $a < 4$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; a] \cup [4; +\infty)$	$[a; 4]$	$[-4; a]$	$(-\infty; -4] \cup [a; +\infty)$	$[4; -a]$

Завдання 9.23–9.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

9.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $5x > 30$	А $(-\infty; -6)$
2 $-5x > 30$	Б $(-\infty; 6)$
3 $5x < 30$	В $(-6; +\infty)$
4 $-5x < 30$	Г $(-6; 6)$
	Д $(6; +\infty)$

9.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x-1}{3} < 1$	А $(-\infty; -4)$
2 $\frac{x+1}{3} < 1$	Б $(-\infty; 2)$
3 $\frac{-x+1}{3} < 1$	В $(-\infty; 4)$
4 $\frac{-x-1}{3} < 1$	Г $(-4; +\infty)$
	Д $(-2; +\infty)$

9.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} < 1$	А $(-\infty; -12)$
2 $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} < 1$	Б $(-\infty; 12)$
3 $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} < -1$	В $(-12; 12)$
4 $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} < -1$	Г $(-12; +\infty)$
	Д $(12; +\infty)$



- 9.26.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв’язків (А–Д).
- |                        |                                      |
|------------------------|--------------------------------------|
| 1 $(x - 8)(x - 3) < 0$ | А $(-\infty; -8) \cup (-3; +\infty)$ |
| 2 $(x - 8)(x + 3) > 0$ | Б $(-\infty; -3) \cup (8; +\infty)$  |
| 3 $(x + 8)(x - 3) < 0$ | В $(-\infty; 3) \cup (8; +\infty)$   |
| 4 $(x + 8)(x + 3) > 0$ | Г $(-8; 3)$                          |
|                        | Д $(3; 8)$                           |
- 9.27.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв’язків (А–Д).
- |                        |                                     |
|------------------------|-------------------------------------|
| 1 $(x - 2)(x + 3) < 0$ | А $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ |
| 2 $(2 - x)(x + 3) < 0$ | Б $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ |
| 3 $(x + 2)(x - 3) < 0$ | В $(-3; -2)$                        |
| 4 $(x + 2)(3 - x) < 0$ | Г $(-3; 2)$                         |
|                        | Д $(-2; 3)$                         |
- 9.28.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв’язків (А–Д).
- |                                 |                             |
|---------------------------------|-----------------------------|
| 1 $(x + 3)^2 x(x - 1) \leq 0$   | А $(-\infty; 0]$            |
| 2 $x^2(x + 3)(x - 1) \leq 0$    | Б $(-\infty; 0] \cup \{1\}$ |
| 3 $(x + 3)x(x - 1)^2 \leq 0$    | В $[-3; 1]$                 |
| 4 $(x + 3)^2 x(x - 1)^2 \leq 0$ | Г $[-3; 0] \cup \{1\}$      |
|                                 | Д $\{-3\} \cup [0; 1]$      |
- 9.29.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв’язків (А–Д).
- |                        |                                     |
|------------------------|-------------------------------------|
| 1 $x^2 + x - 6 < 0$    | А $\emptyset$                       |
| 2 $x^2 - x - 6 < 0$    | Б $(-\infty; +\infty)$              |
| 3 $-x^2 + x + 12 < 0$  | В $(-2; 3)$                         |
| 4 $-x^2 - 6x - 10 < 0$ | Г $(-3; 2)$                         |
|                        | Д $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$ |
- 9.30.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв’язків (А–Д).
- |                    |              |
|--------------------|--------------|
| 1 $3 < x - 2 < 5$  | А $(-7; -5)$ |
| 2 $3 < x + 2 < 5$  | Б $(-3; -1)$ |
| 3 $3 < -x - 2 < 5$ | В $(-1; 3)$  |
| 4 $3 < -x + 2 < 5$ | Г $(1; 3)$   |
|                    | Д $(5; 7)$   |
- 9.31.** Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв’язків (А–Д).
- |                 |              |
|-----------------|--------------|
| 1 $ x - 2  < 5$ | А $(-7; -3)$ |
| 2 $ x + 2  < 5$ | Б $(-7; 7)$  |
| 3 $ x - 5  < 2$ | В $(-7; 3)$  |
| 4 $ x + 5  < 2$ | Г $(-3; 7)$  |
|                 | Д $(3; 7)$   |

9.32. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1  $|x - 3| > 4$

А  $(-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$

2  $|x - 4| > 3$

Б  $(-\infty; -7) \cup (-1; +\infty)$

3  $|x + 4| > 3$

В  $(-\infty; -7) \cup (-1; +\infty)$

4  $|x + 3| > 4$

Г  $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$

Д  $(-\infty; 1) \cup (7; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 9.33–9.45. Відповідь запишіть десятковим дробом.

9.33. Розв'язати нерівність  $\frac{2-x}{4} + 1 < \frac{2x-1}{10} - \frac{2x-3}{6}$ . У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

9.34. Розв'язати нерівність  $7 < 1 - 3x < 16$ . У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.

9.35. Розв'язати нерівність  $x + 1 < \frac{x}{2} < x + 2$ . У відповідь записати суму цілих розв'язків.

9.36. Розв'язати нерівність  $2 \leq x^2 + x < 6$ . У відповідь записати найбільший додатний розв'язок.

9.37. Розв'язати нерівність  $(x^2 + 2x - 15)(x^2 - 4x + 3)(x - 1) \leq 0$ . У відповідь записати кількість додатних цілих розв'язків.

9.38. Розв'язати нерівність  $x^6 - 9x^3 + 8 < 0$ . У відповідь записати кількість цілих розв'язків.

9.39. Розв'язати нерівність  $(x - 2)^4 - 13(x - 2)^2 + 36 \leq 0$ . У відповідь записати суму цілих розв'язків.

9.40. Розв'язати нерівність  $1 < |x - 2| < 5$ . У відповідь записати добуток цілих розв'язків.

9.41. Розв'язати нерівність  $x^2 - 3|x| + 2 \leq 0$ . У відповідь записати добуток цілих розв'язків.

9.42. Розв'язати нерівність  $|3x - 8| < x - 2$ . У відповідь записати середину проміжку, який є розв'язком нерівності.

9.43. Розв'язати нерівність  $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) \leq -5$ . У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків.

9.44. Розв'язати нерівність  $|x^2 - x + 1| \geq |x^2 - 3x + 4|$ . У відповідь записати найменший розв'язок.

9.45. Розв'язати нерівність  $|x - 1| + |x + 1| < 4$ . У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

## ТЕМА 21. АРИФМЕТИЧНА ТА ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЇ

*Арифметичною прогресією* називають послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, утворюється додаванням до попереднього члена одного і того ж числа. Це число називають *різницею арифметичної прогресії* і позначають  $d$ . Наприклад, послідовність  $(a_n)$ :  $-8; -1; 6; 13; \dots$  є арифметичною прогресією, перший член якої дорівнює  $a_1 = -8$ , а різниця —  $d = 7$ .

Якщо  $(a_n)$  — арифметична прогресія, то:

- $a_{n+1} = a_n + d$  — рекурентна формула арифметичної прогресії;
- $d = a_{n+1} - a_n$  — різниця арифметичної прогресії;
- $a_n = a_1 + d(n-1)$  — формула  $n$ -го члена арифметичної прогресії;
- $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ ,  $n \geq 2$  — кожен член арифметичної прогресії, крім першого й останнього, якщо вона скінченна, є середнім арифметичним сусідніх з ним членів;
- $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$  або  $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$  — формули суми  $n$  перших членів арифметичної прогресії.

**Приклад 1.** Записати для арифметичної прогресії  $(a_n)$ :  $-38; -34; -30; \dots$  формулу  $n$ -го члена та знайти суму шести її послідовних членів, починаючи з восьмого.

■ Оскільки  $a_1 = -38$ , а  $a_2 = -34$ , то  $d = a_2 - a_1 = -34 - (-38) = 4$ . Формула  $n$ -го члена арифметичної прогресії  $(a_n)$ :  $a_n = -38 + 4(n-1) = 4n - 42$ . Шукана сума шести членів є різницею суми перших тринадцяти та перших семи членів заданої прогресії:  $S = S_{13} - S_7$ .

$$\begin{aligned} S &= \frac{2a_1 + d(13-1)}{2} \cdot 13 - \frac{2a_1 + d(7-1)}{2} \cdot 7 = \frac{(2a_1 + 12d) \cdot 13 - (2a_1 + 6d) \cdot 7}{2} = \frac{26a_1 + 156d - 14a_1 - 42d}{2} = \\ &= \frac{12a_1 + 114d}{2} = 6a_1 + 57d = 6 \cdot (-38) + 57 \cdot 4 = -228 + 228 = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

*Геометричною прогресією* називають послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а інші утворюються множенням попереднього члена на одне й те ж число, відмінне від нуля. Це число називають *знаменником геометричної прогресії* і позначають  $q$ . Наприклад, послідовність  $(b_n)$ :  $1; 3; 9; 27; \dots$  є геометричною прогресією, перший член якої дорівнює  $b_1 = 1$ , а знаменник —  $q = 3$ .

Якщо  $(b_n)$  — геометрична прогресія, то:

- $b_{n+1} = b_n \cdot q$ ,  $b_1 \neq 0$ ,  $q \neq 0$  — рекурентна формула геометричної прогресії;
- $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$  — знаменник геометричної прогресії;
- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$  — формула  $n$ -го члена геометричної прогресії;
- $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ ,  $n \geq 2$  — квадрат кожного члена геометричної прогресії, крім першого й останнього, якщо вона скінченна, є добутком сусідніх з ним членів;

- $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$  або  $S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$  — формули суми  $n$  перших членів геометричної прогресії, у якій  $q \neq 1$ . Якщо  $q = 1$ , то  $S_n = b_1 n$ ;
- $S = \frac{b_1}{1 - q}$  — сума нескінченної геометричної прогресії, якщо  $|q| < 1$ .

**Приклад 2.** Записати для геометричної прогресії  $(b_n)$ :  $-8; 4; -2; 1; \dots$  формулу  $n$ -го члена та знайти її десятий член, суму перших десяти членів і суму всіх її членів.

■ Оскільки  $b_1 = -8$ , а  $b_2 = 4$ , то  $q = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$ . Формула  $n$ -го члена даної геометричної

прогресії:  $b_n = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -8 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^1} = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ .

Тоді  $b_{10} = b_1 \cdot q^9 = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = (-2)^3 \cdot \frac{1}{(-2)^9} = \frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{64}$ .

$$S_{10} = \frac{b_{10}q - b_1}{q - 1} = \frac{\frac{1}{64} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - (-8)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{1}{128} + 8}{-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1023}{128}}{-\frac{3}{2}} = \frac{341}{64} = -5\frac{21}{64}.$$

Модуль знаменника даної геометричної прогресії менший від одиниці, тому сума всіх її членів дорівнює:  $S = \frac{-8}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-8}{\frac{3}{2}} = -\frac{16}{3} = -5\frac{1}{3}$ . ■

**Приклад 3.** Знайти суму п'яти членів послідовності, заданої формулою  $y_n = \frac{1}{16} \cdot 4^{n+1}$ .

■  $y_1 = \frac{1}{16} \cdot 4^{1+1} = 1$ ;  $y_2 = \frac{1}{16} \cdot 4^{2+1} = 4$ ;  $y_3 = 16$ ;  $y_4 = 64$ ;  $y_5 = 256$ .

$S_5 = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 = 341$ .

Відповідь. 341. ■

**Приклад 4.** В арифметичній прогресії  $a_1 = 5$ ;  $a_{100} = 203$ . Знайти  $a_{30}$ .

А	Б	В	Г	Д
173	63	60	65	35

■ За умовою,  $a_1 = 5$ ,  $a_{100} = 203$ . Для сотого члена прогресії маємо:  $203 = 5 + 99d$ ;  $99d = 198$ ;  $d = 2$ . Обчислимо  $a_{30}$ :  $a_{30} = a_1 + (30 - 1)d = 5 + 29 \cdot 2 = 63$ .

Відповідь. Б. ■

Завдання 21.1–21.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

21.1. Знайти тридцять перший член арифметичної прогресії 3; 5,5; 8; ...

А	Б	В	Г	Д
85,5	83	80,5	78	73,5

21.2. В арифметичній прогресії  $(a_n)$   $a_1 = -2,7$ ;  $a_{16} = 1,8$ . Знайти різницю прогресії.

А	Б	В	Г	Д
0,5	0,2	0,4	-0,4	0,3

21.3. Ламана містить 14 відрізків. Кожний її відрізок, починаючи з другого, на 2 см більший від попереднього. Знайти довжину найменшого з відрізків, якщо найбільший з них дорівнює 29 см.

А	Б	В	Г	Д
2 см	2,5 см	3 см	3,5 см	4 см

21.4. В арифметичній прогресії  $a_1 = 3$ ,  $a_{75} = 299$ . Знайти  $a_{50}$ .

А	Б	В	Г	Д
90	99	190	199	203

21.5. В арифметичній прогресії тридцять членів. Знайти суму всіх членів прогресії, якщо перший її член дорівнює  $-12$ , а останній —  $75$ .

А	Б	В	Г	Д
1305	945	2610	835	1890

21.6. Знайти суму перших тринадцяти членів арифметичної прогресії  $-8$ ;  $-5$ ;  $-2$ ; ...

А	Б	В	Г	Д
140	120	130	240	260

21.7. Третій і сьомий члени арифметичної прогресії відповідно дорівнюють 11 і 23. Знайти суму 10-ти перших членів цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
85	35	185	175	370

21.8. Записати формулу для обчислення  $n$ -го члена геометричної прогресії 4; 12; 36; ...

А	Б	В	Г	Д
$b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$	$b_n = 4 \cdot 8^{n-1}$	$b_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	$b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$	$b_n = 4 \cdot 3^n$

21.9. Записати формулу для обчислення суми  $n$  перших членів геометричної прогресії 2; 6; 18; ...

А	Б	В	Г	Д
$2n$	$3^{n+1} - 7$	$3n - 1$	$2^n + 1$	$3^n - 1$

21.10.  $17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^{20} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{16 \cdot (17^{20} - 1)}{17}$	$\frac{17 \cdot (17^{19} - 1)}{16}$	$\frac{17 \cdot (17^{20} - 1)}{16}$	$\frac{17^{20} - 1}{16}$	$\frac{17^{21} - 1}{16}$

21.11. Знайти суму нескінченно спадної геометричної прогресії  $3; -\frac{3}{2}; \frac{3}{4}; -\frac{3}{8}; \dots$

А	Б	В	Г	Д
2	3	6	2,5	1

21.12. Обчислити суму  $21^{-1} + 21^{-2} + 21^{-3} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
0,1	0,05	0,01	0,2	0,02

21.13.  $(a_n)$  — арифметична прогресія, в якій  $a_1 = 9, a_{10} = 27$ . Знайти  $a_{15}$ .

А	Б	В	Г	Д
Не можна визначити	41	39	47	37

21.14. В арифметичній прогресії  $(a_n)$   $a_8 = 6$ . Знайти  $S_{15}$ .

А	Б	В	Г	Д
180	84	96	90	не можна визначити

21.15. Сума восьмого і двадцятого членів арифметичної прогресії дорівнює 48. Знайти чотирнадцятий член прогресії.

А	Б	В	Г	Д
96	24	26	22	не можна визначити

21.16.  $(a_n)$  — арифметична прогресія. Знайти суму перших її десяти членів, якщо  $a_4 = 10$  і  $a_7 = 19$ .

А	Б	В	Г	Д
145	290	155	390	310

21.17. Знайти суму натуральних чисел від 40 до 200 включно.

А	Б	В	Г	Д
19280	19200	19320	38400	38640

21.18. Знайти знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії, якщо її перший член

$$b_1 = \frac{1}{101}, \text{ а сума } - \frac{1}{100}.$$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{101}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{300}$

21.19. Вираз  $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 + a^8 - a^9$ , де  $a \neq 1$ , тотожно дорівнює виразу ...

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a^{10} - 1}{a - 1}$	$\frac{a^{10} + 1}{a + 1}$	$\frac{a^{10} - 1}{a + 1}$	$\frac{1 - a^{10}}{a + 1}$	$\frac{1 - a^9}{a + 1}$

21.20. У пробірці міститься три клітини, які розмножуються поділом навпіл. Скільки утвориться клітин після  $n$ -го поділу?

А	Б	В	Г	Д
$2 \cdot 3^n$	$2 \cdot 3^{n-1}$	$3 + 2^n$	$3 \cdot 2^{n-1}$	$3 \cdot 2^n$

21.21. Вкладник вніс до банку  $a$  гривень під 10% річних. Скільки грошей буде на рахунку вкладника через  $n$  років?

А	Б	В	Г	Д
$1,1^n a$	$1,1a^n$	$(1 + 0,1^n)a$	$(1 + 1,1^n)a$	$0,1a^n$

21.22.  $11 + 101 + 1001 + 10001 + \underbrace{100\dots001}_n = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{10^{n+1} + n - 10}{9}$	$\frac{10^{n+2} + 9n - 1}{9}$	$\frac{10^{n+2} - 10}{9}$	$\frac{10^{n+1} - 10}{9}$	$\frac{10^{n+2} + 10n - 1}{9}$

Завдання 21.23–21.33 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

21.23. Установити відповідність між послідовностями (1–4) та їхніми можливими властивостями (А–Д).

1 Арифметична прогресія

2 Не прогресія

3 Геометрична прогресія ( $|q| > 1$ )

4 Нескінченна геометрична прогресія ( $|q| < 1$ )

А  $S_n = \frac{n^2 + 13n}{2}$

Б  $S = \frac{a_1}{1 - q}$

В  $S_n = 3n + 2$

Г  $a_n = 2^n$

Д  $b_n = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

21.24. Установити відповідність між арифметичними прогресіями  $(a_n)$  (1–4), заданими двома членами, та їх різницями (А–Д).

- |                           |        |
|---------------------------|--------|
| 1 $a_1 = -1, a_2 = 3$     | А $-2$ |
| 2 $a_1 = -30, a_5 = -6$   | Б $-4$ |
| 3 $a_1 = 13, a_4 = 1$     | В $2$  |
| 4 $a_1 = 17, a_{11} = -3$ | Г $4$  |
|                           | Д $6$  |

21.25. Установити відповідність між арифметичними прогресіями  $(a_n)$  (1–4), заданими двома членами, та формулами  $n$ -го члена (А–Д).

- |                          |                   |
|--------------------------|-------------------|
| 1 $a_1 = 2, a_3 = 12$    | А $a_n = 5 + 3n$  |
| 2 $a_2 = -11, a_5 = -20$ | Б $a_n = 3 + 5n$  |
| 3 $a_3 = 18, a_7 = 38$   | В $a_n = -5 - 3n$ |
| 4 $a_4 = -23, a_6 = -33$ | Г $a_n = -3 - 5n$ |
|                          | Д $a_n = -3 + 5n$ |

21.26. Установити відповідність між арифметичними прогресіями  $(a_n)$  (1–4), заданими двома членами, та їх десятим членом (А–Д).

- |                            |                  |
|----------------------------|------------------|
| 1 $a_1 = -9, a_3 = -23$    | А $a_{10} = 25$  |
| 2 $a_1 = -2, a_7 = 16$     | Б $a_{10} = 35$  |
| 3 $a_1 = -5, a_{13} = -29$ | В $a_{10} = -45$ |
| 4 $a_1 = -1, a_{14} = 51$  | Г $a_{10} = -23$ |
|                            | Д $a_{10} = -72$ |

21.27. Установити відповідність між арифметичними прогресіями  $(a_n)$  (1–4), заданими двома членами, та формулами сум  $n$  перших її членів (А–Д).

- |                          |                      |
|--------------------------|----------------------|
| 1 $a_1 = 5, a_2 = 9$     | А $S_n = n^2 + 6n$   |
| 2 $a_1 = -5, a_3 = -13$  | Б $S_n = -n^2 - 10n$ |
| 3 $a_1 = 7, a_4 = 13$    | В $S_n = -2n^2 - 3n$ |
| 4 $a_1 = -11, a_5 = -19$ | Г $S_n = 2n^2 + 3n$  |
|                          | Д $S_n = -n^2 + 10n$ |

21.28. Установити відповідність між арифметичними прогресіями  $(a_n)$  (1–4), заданими двома членами, та сумами 10 перших її членів (А–Д).

- |                        |          |
|------------------------|----------|
| 1 $a_1 = 7, a_2 = 9$   | А $-160$ |
| 2 $a_1 = -7, a_2 = -9$ | Б $-60$  |
| 3 $a_1 = -3, a_3 = 1$  | В $0$    |
| 4 $a_1 = 3, a_3 = -1$  | Г $60$   |
|                        | Д $160$  |



21.29. Установити відповідність між геометричними прогресіями  $(a_n)$  (1–4), заданими двома членами, та їх знаменниками (А–Д).

1  $b_1 = -2, b_4 = -54$

А  $-3$

2  $b_2 = -6, b_5 = 162$

Б  $-0,5$

3  $b_1 = 32, b_4 = 4$

В  $-\frac{1}{3}$

4  $b_3 = -24, b_6 = 3$

Г  $0,5$

Д  $3$

21.30. Установити відповідність між геометричними прогресіями  $(a_n)$  (1–4), заданими двома членами, та формулами  $n$ -го члена (А–Д).

1  $b_1 = 4, b_4 = 108$

А  $b_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$

2  $b_1 = 2, b_4 = -54$

Б  $b_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

3  $b_2 = -6, b_5 = 48$

В  $b_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$

4  $b_2 = 6, b_5 = \frac{81}{32}$

Г  $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

Д  $b_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

21.31. Установити відповідність між геометричними прогресіями  $(a_n)$  (1–4), заданими двома першими членами, та формулами суми  $n$  перших їх членів (А–Д).

1  $b_1 = 4, b_2 = 8$

А  $S_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}$

2  $b_1 = -4, b_2 = -2$

Б  $S_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}$

3  $b_1 = 12, b_2 = -24$

В  $S_n = 2^{n+2} - 4$

4  $b_1 = \frac{3}{4}, b_2 = -\frac{3}{8}$

Г  $S_n = 2^{-n+3} - 8$

Д  $S_n = 2 \cdot (-2)^{n+1} + 4$

21.32. Установити відповідність між нескінченними спадними геометричними прогресіями  $(a_n)$  (1–4), заданими двома першими членами, та їх сумами (А–Д).

1  $b_1 = 6, b_2 = 1$

А  $20\frac{5}{6}$

2  $b_1 = 25, b_2 = -5$

Б  $0,6$

3  $b_1 = \frac{2}{3}, b_2 = -\frac{1}{3}$

В  $3,6$

4  $b_1 = \frac{3}{7}, b_2 = \frac{6}{49}$

Г  $7,2$

Д  $\frac{4}{9}$

21.33. Установити відповідність між заданими виразами (1–4) та їх сумами (А–Д).

1  $1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10}$ , де  $a \neq 1$ .

2  $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 + a^5 - a^6$ , де  $a \neq 1$ .

3  $a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10} + a^{12}$ , де  $a \neq 1$ .

4  $a - a^2 + a^3 - a^4 + a^5 - a^6$ , де  $a \neq -1$ .

А  $\frac{a^7 + 1}{a + 1}$

Б  $\frac{a^{14} - a^2}{a^2 - 1}$

В  $\frac{a - a^7}{a + 1}$

Г  $\frac{a - a^7}{a - 1}$

Д  $\frac{1 - a^{12}}{1 - a^2}$

Розв'яжіть завдання 21.34–21.46. Відповідь запишіть десятковим дробом.

21.34. Знайти найбільший від'ємний член арифметичної прогресії ( $a_n$ ), у якої  $a_1 = 101$ ,  $d = -7$ .

21.35. Знайти суму  $S$  членів арифметичної прогресії ( $a_n$ ) з десятого до сорокового включно, якщо  $a_1 = -10$ ,  $d = 2$ . У відповідь записати  $S : 100$ .

21.36. Із двох точок, відстань між якими дорівнює 155 м, одночасно починають рухатися назустріч одне одному два тіла. Перше тіло рухається рівномірно зі швидкістю 8 м/с, а друге тіло за першу секунду пройшло 3 м, а кожної наступної секунди проходить на 1 м більше, ніж за попередню. Через скільки секунд тіла зустрінуться?

21.37. Знайти суму  $S$  усіх трицифрових натуральних чисел, які діляться на число 7 без остачі. У відповідь записати  $S : 100$ .

21.38. Знайти найбільше значення  $x$ , за яких числа  $x - 1$ ,  $2x - 1$  і  $x^2 - 5$ , записані в указаному порядку, утворюють арифметичну прогресію.

21.39. Визначити, за яких значень  $x$  три числа  $\lg 2$ ,  $\lg(3^x - 3)$  і  $\lg(3^x + 9)$ , узяті в заданій послідовності, утворюють арифметичну прогресію.

21.40. Знайти різницю арифметичної прогресії, якщо сума перших її 100 членів на 50 більша від суми ста наступних.

21.41. Інфузорії-туфельки розмножуються поділом на дві частини. Скільки утвориться інфузорій із п'яти після семи поділів?

21.42.  $(x_n)$  — нескінченна спадна геометрична прогресія, у якої  $x_1 = 3$ ,  $q = \frac{1}{3}$ . Знайти суму її членів з непарними номерами.

21.43. У посудині міститься 1000 л повітря. Кожний рух поршня розріджувального насоса видаляє з посудини 0,1 частини повітря. Скільки літрів повітря залишиться в посудині після п'яти рухів поршня?

21.44. Спростити рівняння функції  $y = x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{(1+x^4)^2} + \frac{x^4}{(1+x^4)^3} + \dots$  та знайти її значення, якщо  $x = 3$ .

21.45. Знайти перші п'ятдесят членів двох арифметичних прогресій 2; 7; 12; ... і 3; 10; 17; ..., які однакові в обох прогресіях та обчислити їх суму  $S$ . У відповідь записати  $S : 100$ .

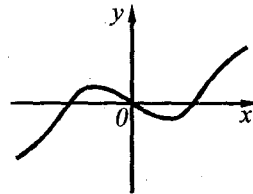
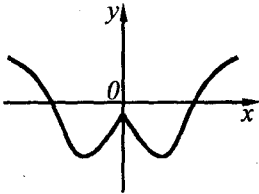
21.46. Числа  $m$ ,  $n$  і  $p$ , відмінні від нуля та записані в заданій послідовності, утворюють геометричну прогресію, а числа  $m + n$ ,  $n + p$  і  $p + m$ , записані в заданій послідовності, — арифметичну прогресію. Знайти знаменник геометричної прогресії, відмінний від 1.

## ТЕМА 22. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

**Функцією** називають таку відповідність (залежність) між змінними  $x$  із множини  $D$  та  $y$  із множини  $E$ , при якій кожному значенню змінної  $x$  відповідає єдине значення змінної  $y$ . Змінну  $x$  називають **незалежною змінною**, або **аргументом функції**, а  $y$  — **залежною змінною**, або **значенням функції** чи, просто, функцією. Множину  $D$ , утворену всіма значеннями аргументу, називають **областю визначення функції**. Множину, утворену значеннями функції, називають **областю значень функції**. Те, що  $y$  є функцією від  $x$  записують так:  $y = f(x)$  або  $y = y(x)$ . Запис  $y_0 = f(x_0)$  означає, що значенню  $x_0$  функція  $f$  ставить у відповідність значення  $y_0$ .

Значення аргументу, при якому функція дорівнює нулю, називають **нулем функції**. Щоб знайти нулі функції, треба розв'язати рівняння  $f(x) = 0$ . Наприклад, нулями функції  $y = x^2 - 2x$  є числа 0 та 2, бо  $y(0) = 0$  та  $y(2) = 0$ . Нулі функції розбивають її область визначення на **проміжки знакосталості** — проміжки, на яких функція набуває значень одного знака.

Функцію  $y = f(x)$  називають **парною**, якщо для будь-якого  $x$  з її області визначення виконується рівність:  $f(-x) = f(x)$ . Функцію  $y = f(x)$  називають **непарною**, якщо для будь-якого  $x$  з її області визначення виконується рівність:  $f(-x) = -f(x)$ . Наприклад, функції  $y = x^2$ ,  $y = \cos x$  — парні, функції  $y = x^5 + x$ ,  $y = \sin x$  — непарні, а функції  $y = x^2 + x$ ,  $y = \sqrt{x}$  — ні парні, ні непарні. Графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.



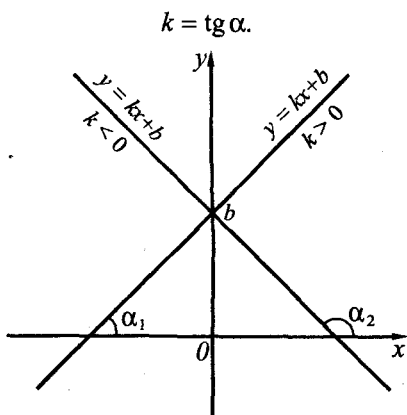
Функцію  $y = f(x)$  називають **періодичною**, якщо існує таке число  $T > 0$ , що для будь-якого числа  $x$  із області визначення функції виконується рівність  $f(x \pm T) = f(x)$ . Число  $T$  називають **періодом функції**. Найменше додатне число, яке є періодом функції називають **найменшим додатним періодом**, або **основним періодом** цієї функції, і позначають  $T_0$ . Основним періодом функцій  $y = \sin x$  та  $y = \cos x$  є число  $2\pi$ , а функцій  $y = \operatorname{tg} x$  та  $y = \operatorname{ctg} x$  —  $\pi$ .

**Графіком функції** називають фігуру, утворену усіма точками координатної площини, абсциси яких дорівнюють усім значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

**Лінійна функція**  $y = kx + b$  ( $k \neq 0$ )

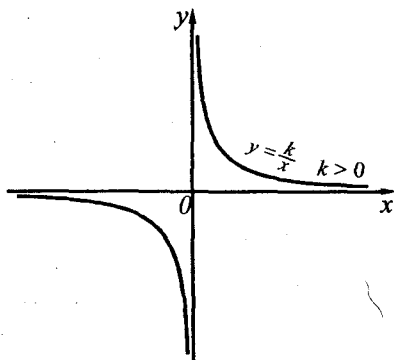
- Область визначення:  $x \in (-\infty; +\infty)$ .
- Область значень:  $y \in (-\infty; +\infty)$ .
- Графік: пряма.

Число  $k$  називають *кутовим коефіцієнтом прямої*, яка є графіком функції  $y = kx + b$ .



**Обернена пропорційність**  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ )

- Область визначення:  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .
- Область значень:  $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .
- Графік: *гіпербола*.
- Функція непарна.



**Квадратична функція**  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )

- Область визначення:  $x \in (-\infty; +\infty)$ .
- Область значень:  $y \in \left[ \frac{4ac - b^2}{4a}; +\infty \right)$ , якщо  $a > 0$  або  $y \in \left( -\infty; \frac{4ac - b^2}{4a} \right]$ , якщо  $a < 0$ .
- Графік: *парабола*.
- Координати вершини параболі:  $\left( -\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ .

**Приклад 1.** За якого значення параметра  $c$  графік функції  $y = \log_2(x + c)$  проходить через точку  $(2; 3)$ ?

А	Б	В	Г	Д
7	4	1	Інша відповідь	4,5

■  $x = 2; y = 3. \log_2(2 + c) = 3; 2 + c = 2^3; c = 8 - 2; c = 6.$

Відповідь. Г. ■

**Приклад 2.** Знайти множину значень функції  $y = \sin x - 3$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-4; -2]$	$[-10; 4]$	$[2; 4]$	$(-\infty; +\infty)$	$[-3; 3]$

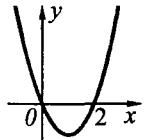
■ За властивістю функції  $y = \sin x$ , множиною її значень є  $[-1; 1]$ , тобто  $-1 \leq \sin x \leq 1$ . Додамо до всіх частин подвійної нерівності число  $-3$  й отримаємо:  $-1 - 3 \leq \sin x - 3 \leq 1 - 3$ ;  $-4 \leq \sin x - 3 \leq -2$ . Отже, множиною значень функції  $y = \sin x - 3$  є проміжок  $[-4; -2]$ .

Відповідь. А. ■

**Приклад 3.** Знайти область визначення функції  $f(x) = \log_{0,5}(2x - x^2)$ .

А	Б	В	Г	Д
$(0; 2)$	$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$	Інша відповідь	$(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$	$[0; 2)$

■ За властивістю логарифмічної функції областю визначення функції  $f(x) = \log_{0,5}(2x - x^2)$  є усі значення  $x$ , які задовольняють умову  $2x - x^2 > 0$ . Розв'яжемо утворену нерівність:  $2x - x^2 > 0; x^2 - 2x < 0; x(x - 2) < 0; x_1 = 0, x_2 = 2. x \in (0; 2)$ .



Відповідь. А. ■

**Приклад 4.** Яке з наведених чисел входить до множини значень функції  $y = 2^x + 4$ ?

А	Б	В	Г	Д
5	Жодне з чисел не входить	3	4	0

■ Знайдемо множину значень функції  $y = 2^x + 4$ . Оскільки  $0 < 2^x < +\infty$ , то  $4 < 2^x + 4 < +\infty$ . Тому множиною значень функції  $y = 2^x + 4$  є  $y \in (4; +\infty)$ . З указаних у відповідях чисел у проміжок  $(4; +\infty)$  входить лише число 5.

Відповідь. А. ■

Завдання 22.1–22.29 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

22.1. Знайти область визначення функції  $y = \lg(x^2 - 6x + 8)$ .

А	Б	В	Г	Д
$R$	$(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$	$(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$	$(2; 4)$	$(-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$

22.2. Знайти область визначення функції  $y = \sqrt{5^{2x-3}} - 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$(1,5; +\infty)$	$[2; +\infty)$	$[1,5; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$[3; +\infty)$

22.3. Знайти область визначення функції  $y = \sqrt{\frac{x-4}{x+1}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$	$(-1; +\infty)$	$(-1; 4)$	$(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup [4; +\infty)$

22.4. Яка з множин є областю визначення функції  $y = \sqrt[3]{-\log_3 x + 1}$ ?

А	Б	В	Г	Д
$[0; 3]$	$[0; 4]$	$[-3; 3)$	$(-\infty; 3]$	$(0; 3]$

22.5. Вказати область визначення функції  $y = \sqrt{(x^2 + 2) \left(2 + \log_5 \frac{1}{x}\right)}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(2; 5]$	$(0; 2]$	$(0; 25]$	$(2; +\infty)$	$(-2; +\infty)$

22.6. Знайти множину значень функції  $y = -x^2 + 4x - 5$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]$	$(-\infty; -1]$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 5]$	$[-5; +\infty)$

22.7. Обчислити відстань від початку координат до вершини параболи  $y = -x^2 + 10x - 13$ .

А	Б	В	Г	Д
5	13	12	17	10

22.8. Знайти множину значень функції  $y = -2\cos x + 5$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 1]$	$[2; 5]$	$[-2; -5]$	$[3; 7]$	$R$

22.9. Знайти множину значень функції  $y = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 1]$	$[-5; 1]$	$[1; 3]$	$[-5; -2]$	$[-3; 3]$

22.10. Знайти множину значень функції  $y = 3 - 2\sin 5x$ .

А	Б	В	Г	Д
$[1; 5]$	$[2; 4]$	$[3; 5]$	$[1; 3]$	$[-1; 1]$

22.11. Дано функцію  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ . Знайти  $f(x+1)$ .

А	Б	В	Г	Д
$f(x+1) = \frac{x}{x+2}$	$f(x+1) = \frac{2}{1+x}$	$f(x+1) = -\frac{x}{x+2}$	$f(x+1) = \frac{1+x}{1-x}$	$f(x+1) = -\frac{2}{1+x}$

22.12. Яка з наведених функцій є парною?

А	Б	В	Г	Д
$y = x^3 + x$	$y = x^6 + 3x$	$y = x^2 +  x $	$y = \frac{x}{x-1}$	$y = \sin x + \operatorname{tg} x$

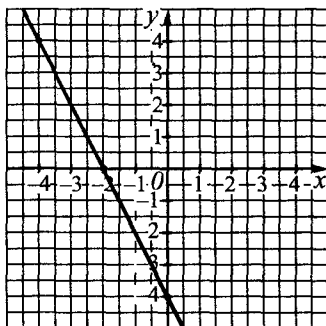
22.13. Яка з наведених функцій є непарною?

А	Б	В	Г	Д
$y = x +  x $	$y = \sin^2 x$	$y = \frac{x^2}{x-1}$	$y = \sqrt[3]{ x }$	$y = \sqrt[3]{x}$

22.14. Функція  $f(x)$  — парна, а функція  $g(x)$  — непарна.  $f(-7) = -11$ ,  $g(5) = -2$ . Обчислити  $2f(-7) - 3g(-5)$ .

А	Б	В	Г	Д
-28	-16	28	16	29

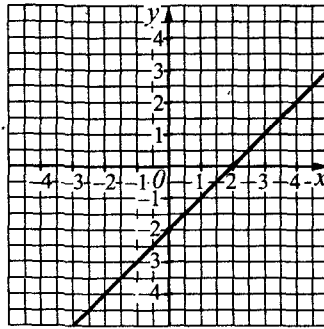
22.15. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
$y = -2x + 4$	$y = 2x - 4$	$y = 2x + 4$	$y = -2x - 4$	$y = -4x - 4$

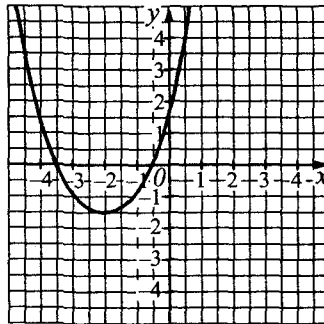


22.16. За ескізом графіка  $y = ax + b$  вказати знаки параметрів  $a$  і  $b$ .



А	Б	В	Г	Д
$a > 0, b > 0$	$a > 0, b < 0$	$a < 0, b > 0$	$a < 0, b < 0$	$a > 0, b = 0$

22.17. За ескізом графіка функції  $y = ax^2 + bx + c$  знайти значення параметрів  $a, b$  і  $c$ .



А	Б	В	Г	Д
$a > 0, b > 0, c > 0$	$a > 0, b > 0, c < 0$	$a > 0, b < 0, c < 0$	$a > 0, b < 0, c > 0$	$a < 0, b < 0, c < 0$

22.18. За яких значень  $a$  парабола  $y = 9x^2 - 12x + 35a$  має з віссю абсцис дві точки перетину?

А	Б	В	Г	Д
$a = \frac{4}{35}$	$a < \frac{4}{35}$	$a > \frac{4}{35}$	$a < \frac{18}{35}$	$a < \frac{16}{35}$

22.19. Вказати функцію, в якій основний період дорівнює  $\pi$ .

А	Б	В	Г	Д
$y = \sin(x + \pi)$	$y = \cos(2x + 1)$	$y = \operatorname{tg}(3x + \pi)$	$y = \operatorname{ctg}(4x + 2)$	$y = \pi$

22.20. Знайти основний період функції  $y = \cos^2 6x$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2\pi}{3}$	$3\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$6\pi$	$\frac{\pi}{6}$

22.21. Знайти основний період функції  $y = 2 \cos \frac{x}{3} + 3 \operatorname{tg} \frac{x}{8}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{24}$	$6\pi$	$24\pi$	$8\pi$	функція неперіодична

22.22. Вказати функцію, обернену до функції  $y = 4x - 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{x+1}{4}$	$y = \frac{1}{4x-1}$	$y = \frac{x}{4} + 1$	$y = 4x + 1$	$y = -4x + 1$

22.23. Вказати функцію, обернену до функції  $y = x^2 - 2, x \in [0; +\infty)$ .

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x^2 - 2}$	$y = \sqrt{x} - 2$	$y = \sqrt{x} + 2$	$y = -\sqrt{x+2}$	$y = \sqrt{x+2}$

22.24. Вказати складену функцію  $y = f(g(x))$ , якщо  $g(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$	$y = x^2 + 1$	$y = \frac{x}{x^2 + 1}$	$y = \frac{x^2 + 1}{x}$	$y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

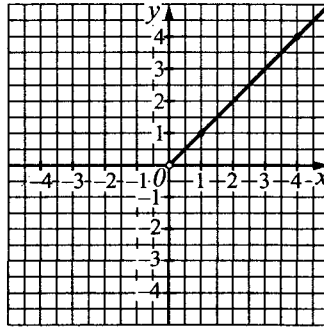
22.25. Вказати складену функцію  $y = f(g(x))$ , якщо  $g(x) = \sqrt{x+1}, f(x) = x^2 - 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$y = (x^2 - 1)\sqrt{x+1},$ $D(y) = [-1; +\infty)$	$y = x,$ $D(y) = (-\infty; +\infty)$	$y = \sqrt{x},$ $D(y) = [0; +\infty)$	$y = \sqrt{x^2},$ $D(y) = (-\infty; +\infty)$	$y = x$ $D(y) = [-1; +\infty)$

22.26. Знайти множину значень функції  $y = 5^{\sin x}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(0; +\infty)$	$R$	$[-5; 5]$	$\left[\frac{1}{5}; 5\right]$	$[-1; 1]$

22.27. Графік якої з наведених функцій зображено на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{x^2}{x}$	$y = \sqrt{x^2}$	$y = 10^{\lg x}$	$y = (\sqrt{x})^2$	$y =  x $

22.28. Знайти множину значень функції  $y = \frac{1}{1+x^2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$R$	$(0; +\infty)$	$(0; 1]$	$(0; \frac{1}{2})$	$[0; \frac{1}{2})$

22.29. Знайти найбільше ціле значення функції  $y = 25 \cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{25}{3}$	0	75	8	-1

Завдання 22.30–22.40 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

22.30. Установити відповідність між функціями (1–4) та областями їх визначення (А–Д).

1  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+2}{x-1}$

А  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2  $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$

Б  $(-2; 1)$

3  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}$

В  $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

Г  $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$

4  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}$

Д  $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$

22.31. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми областями визначення (А–Д).

1  $y = \sqrt{\frac{5+x}{x-1}}$

А (1; 5)

2  $y = \lg \frac{5-x}{x-1}$

Б [1; 5]

В [1; 5]

3  $y = \sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$

Г  $(-\infty; -5] \cup (1; +\infty)$

Д (1; 5)

4  $y = \sqrt{\frac{x-1}{5-x}}$

22.32. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми множинами значень (А–Д).

1  $y = \sqrt{x^2 + 9} + 1$

А  $(-\infty; -4)$

2  $y = 2^x - 4$

Б  $(-\infty; -4]$

3  $y = -x^2 + 4x - 8$

В  $(-\infty; 4)$

4  $y = -3^x + 4$

Г  $[4; +\infty)$

Д  $(-4; +\infty)$

22.33. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми множинами значень (А–Д).

1  $y = 2\arcsin x$

А  $(-\pi; \pi)$

2  $y = 2\arccos x$

Б  $[-\pi; \pi]$

3  $y = 2\arctg x$

В  $(0; \pi)$

4  $y = 2\text{arccotg} x$

Г  $(0; 2\pi)$

Д  $[0; 2\pi]$

22.34. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх найменшими додатними періодами (А–Д).

1  $y = \text{tg} \frac{x}{2}$

А  $\frac{\pi}{4}$

2  $y = \text{ctg} 2x$

Б  $\frac{\pi}{2}$

3  $y = \cos \frac{x}{2}$

В  $\pi$

4  $y = \sin 2x$

Г  $2\pi$

Д  $4\pi$

22.35. Установити відповідність між функціями (1–4) та оберненими до них функціями (А–Д).

1  $y = 3x$

2  $y = \frac{3}{x}$

3  $y = -3x$

4  $y = -\frac{x}{3}$

А  $y = \frac{3}{x}$

Б  $y = -\frac{3}{x}$

В  $y = -3x$

Г  $y = \frac{x}{3}$

Д  $y = -\frac{x}{3}$

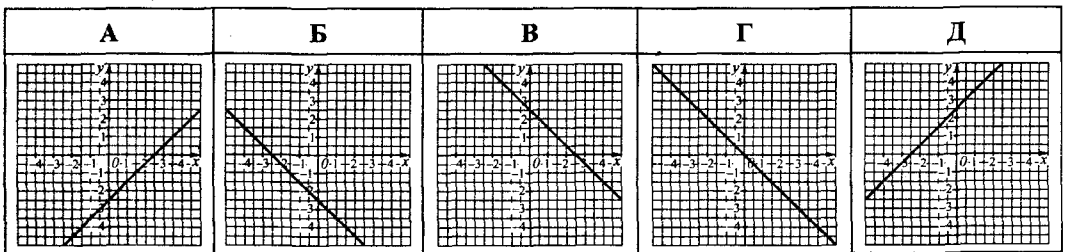
22.36. Дано лінійну функцію  $y = ax + b$ . Установити відповідність між знаками коефіцієнтів  $a$  й  $b$  (1–4) та ескізами графіків (А–Д).

1  $a > 0, b > 0$

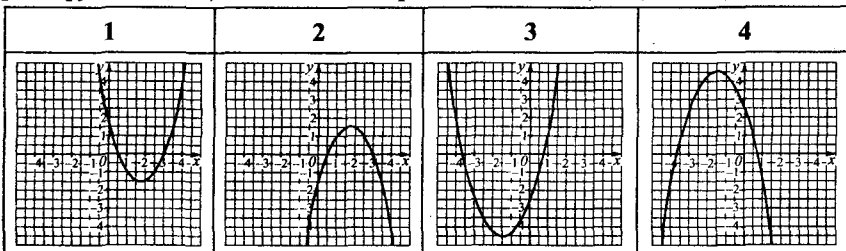
2  $a > 0, b < 0$

3  $a < 0, b > 0$

4  $a < 0, b < 0$



22.37. Дано квадратичну функцію  $y = ax^2 + bx + c$ . Установити відповідність між ескізами графіків функцій (1–4) та знаками коефіцієнтів  $a, b$  і  $c$  (А–Д).



А  $a > 0, b > 0, c > 0$

Б  $a > 0, b > 0, c < 0$

В  $a > 0, b < 0, c > 0$

Г  $a < 0, b < 0, c > 0$

Д  $a < 0, b > 0, c < 0$

22.38. Установити відповідність між функціями (1–4) та проміжками їх зростання (А–Д).

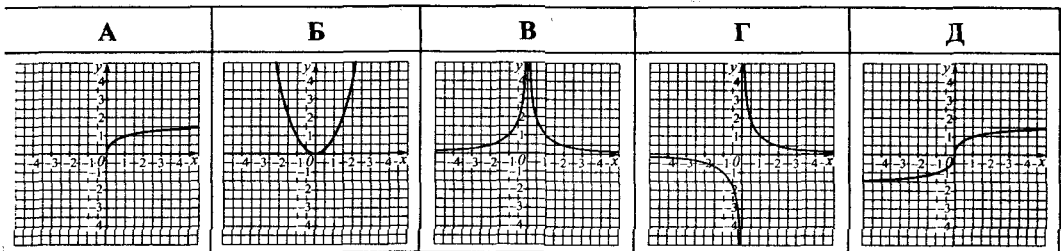
- |                    |                   |
|--------------------|-------------------|
| 1 $y = x^2 - 3$    | А $(-\infty; 0]$  |
| 2 $y = (x - 3)^2$  | Б $[0; +\infty)$  |
| 3 $y = -x^2 + 3$   | В $(-\infty; -3]$ |
| 4 $y = -(x + 3)^2$ | Г $[-3; +\infty)$ |
|                    | Д $[3; +\infty)$  |

22.39. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх парністю (А–Д).

- |                                   |                                |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1 $y = 0$                         | А на парність не досліджується |
| 2 $y = x^3 + \operatorname{tg} x$ | Б парна                        |
| 3 $y = x^4 - \sin x$              | В непарна                      |
| 4 $y = x^5 \sin x$                | Г ні парна, ні непарна         |
|                                   | Д парна і непарна              |

22.40. Установити відповідність між функціями (1–4) та ескізами їх графіків (А–Д).

- 1  $y = \sqrt[5]{x}$
- 2  $y = \frac{1}{x^5}$
- 3  $y = \frac{1}{x^4}$
- 4  $y = \sqrt[4]{x}$



Розв'яжіть завдання 22.41–22.53. Відповідь запишіть десятковим дробом.

22.41. Знайти область визначення функції  $y = \frac{\sqrt{5-x^2-4x}}{3-x}$ . У відповідь записати кількість цілих значень аргументу в області визначення.

22.42. Знайти область визначення функції  $y = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}$ . У відповідь записати найменше ціле значення аргументу.

22.43. Знайти область визначення функції  $y = \log_{x+4} (9-8x-x^2)$ . У відповідь записати кількість цілих значень аргументу з області визначення.

- 22.44. Знайти область визначення функції  $y = \sqrt{\frac{(x+4)(3-x)}{\lg(x^2+1)}}$ . У відповідь записати кількість цілих значень аргументу з області визначення.
- 22.45. Знайти область визначення функції  $y = \arcsin \frac{x-5}{6} - \lg(x^2 - 10x + 24)$ . У відповідь записати кількість цілих значень аргументу з області визначення.
- 22.46. Знайти область визначення функції  $y = \arccos \frac{x-4}{x}$ . У відповідь записати найменше значення аргументу.
- 22.47. Знайти область значень функції  $y = 3\sin^2 x + 2\cos^2 x$ . У відповідь записати кількість цілих значень аргументу.
- 22.48. Скільки різних цілих значень набуває функція  $f(x) = \sqrt{8(\sin^2 2x + \cos^2 2x - 2\sin 2x \cos 2x)}$ ?
- 22.49. Знайти найменший додатний період  $T_0$  функції  $y = \sin x + \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{5}$ . У відповідь записати значення  $T_0 : \pi$ .
- 22.50. Знайти нулі функції  $y = \ln^2(x^2 - 3x - 9) + \sqrt{x^3 - 8x - 8}$ .
- 22.51. Знайти область визначення функції  $f(x) = \sqrt{\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15)}$ . У відповідь записати кількість натуральних чисел, які не належать області визначення функції.
- 22.52. За якого найбільшого значення параметра  $a$  функція  $f(x) = \ln(\sqrt{a^2 + x^2} - x)$  буде непарною?
- 22.53. За яких значень параметра  $a$  число  $\pi$  є періодом функції  $f(x) = \frac{\cos x}{a + \sin x}$ ?

## ТЕМА 23. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Якщо відомий графік функції  $y = f(x)$ , то шляхом його перетворення можна отримати графіки низки інших функцій.

- $y = f(x) + c$ .

Графік функції  $y = f(x) + c$  отримують у результаті паралельного перенесення графіка  $y = f(x)$  на  $c$  одиниць уздовж осі ординат угору, якщо  $c > 0$ , або вниз, якщо  $c < 0$  (див. рис. 1).

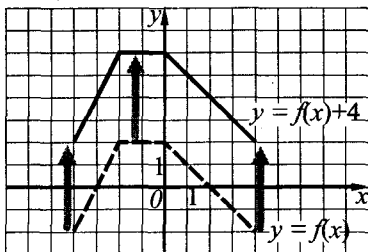


Рис. 1

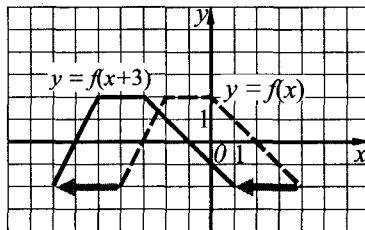


Рис. 2

- $y = f(x + c)$ .

Графік функції  $y = f(x + c)$  отримують у результаті паралельного перенесення графіка  $y = f(x)$  на  $c$  одиниць уздовж осі абсцис ліворуч, якщо  $c > 0$ , або праворуч, якщо  $c < 0$  (див. рис. 2).

- $y = c \cdot f(x)$ .

Графік функції  $y = c \cdot f(x)$  отримують у результаті розтягу графіка  $y = f(x)$  від осі абсцис у  $c$  разів, якщо  $c > 1$ , або стиску до осі абсцис у  $\frac{1}{c}$  разів, якщо  $0 < c < 1$  (див. рис. 3).

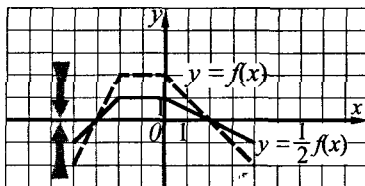
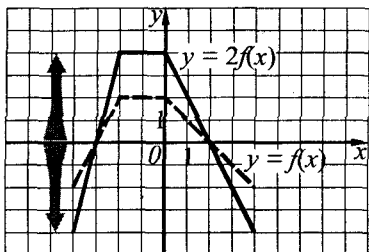


Рис. 3

- $y = -f(x)$ .

Графік функції  $y = -f(x)$  отримують у результаті симетрії графіка  $y = f(x)$  відносно осі абсцис (див. рис. 4).



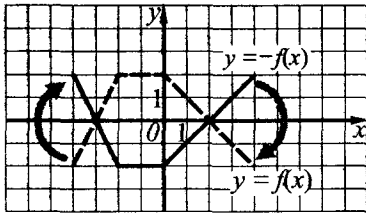


Рис. 4

- $y = f(-x)$ .

Графік функції  $y = f(-x)$  отримують у результаті симетрії графіка  $y = f(x)$  відносно осі ординат (див. рис. 5).

- $y = |f(x)|$ .

Графік функції  $y = |f(x)|$  отримують з графіка  $y = f(x)$ , замінивши ті його частини, які лежать під віссю абсцис, симетричними до них відносно цієї осі (див. рис. 6).

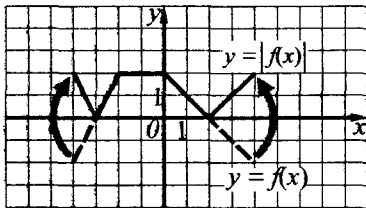


Рис. 6

- $y = f(|x|)$ .

Графік функції  $y = f(|x|)$  отримують з графіка  $y = f(x)$ , замінивши ту його частину, що лежить ліворуч від осі ординат, симетричною до розташованої праворуч частини відносно осі ординат (див. рис. 7).

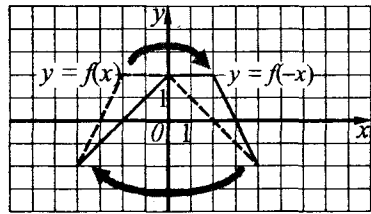


Рис. 5

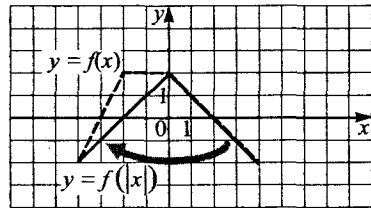
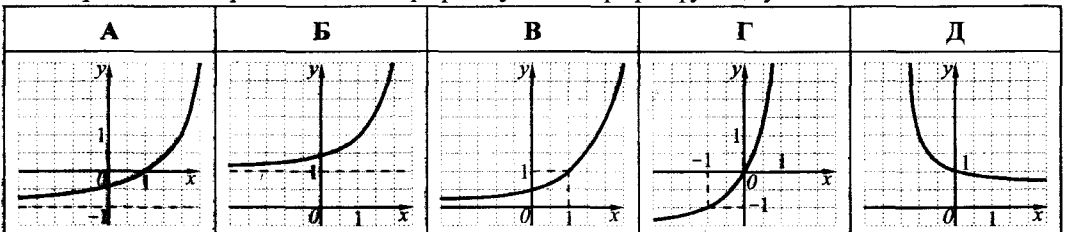


Рис. 7

**Приклад 1.** Серед наведених графіків указати графік функції  $y = 2^{x-1} - 1$ .



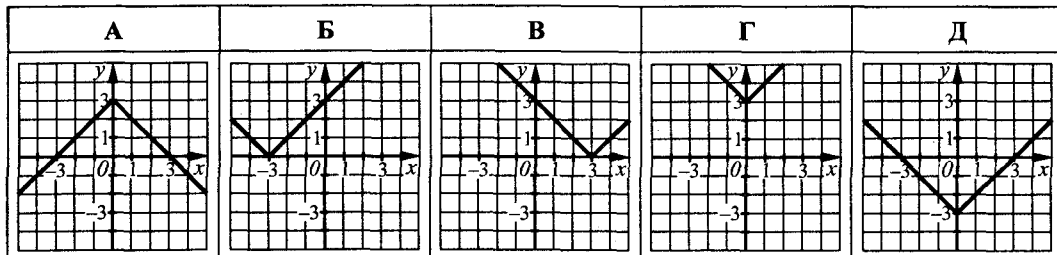
■ Це графік функції  $y = 2^x$ , опущений на 1 вниз і зміщений на 1 праворуч.  
Відповідь. А. ■

Завдання 23.1–23.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

23.1. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка  $y = \frac{1}{x}$  у результаті його паралельного перенесення в додатному напрямі осі  $y$  на 5 одиниць.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x+5}$	$y = \frac{1}{x-5}$	$y = \frac{1}{x} - 5$	$y = \frac{1}{x} + 5$	$y = \frac{5}{x}$

23.2. На якому з рисунків зображено графік функції  $y = |x| - 3$ ?



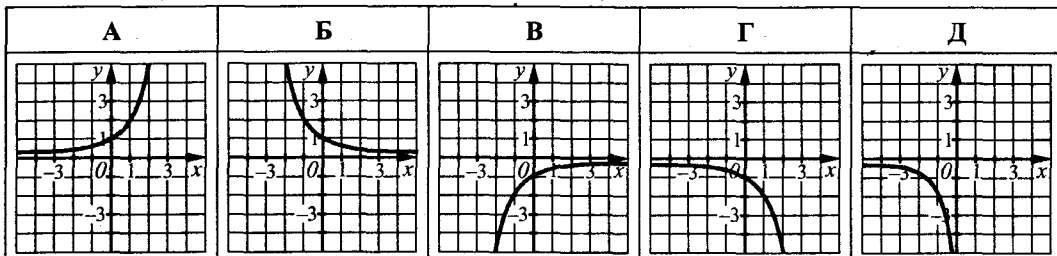
23.3. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка  $y = \cos x$  у результаті його стискування до осі  $x$  утричі.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3\cos x$	$y = \frac{1}{3}\cos x$	$y = \cos 3x$	$y = \cos \frac{x}{3}$	$y = \frac{1}{3}\cos \frac{x}{3}$

23.4. Областю значень функції  $y = f(x)$  є проміжок  $[-4; 16]$ . Знайти область значень функції  $y = \frac{1}{4}f(x)$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-16; 64]$	$[4; 4]$	$[-1; 4]$	$[-4; 16]$	не можна визначити

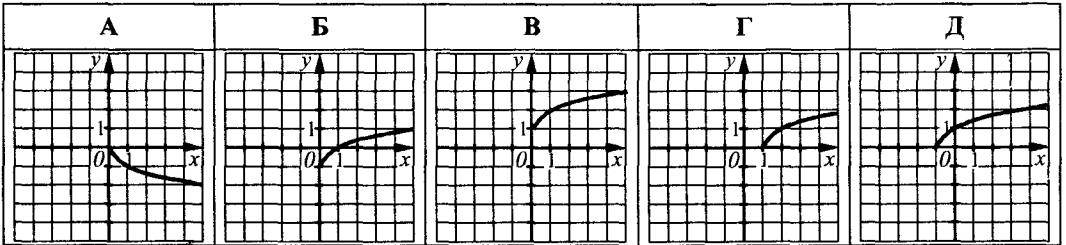
23.5. На якому з рисунків зображено графік функції  $y = -2^x$ ?



23.6. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка функції  $y = x^3$  у результаті його паралельного перенесення в додатному напрямі осі  $x$  на 4 одиниці.

А	Б	В	Г	Д
$y = (x - 4)^3$	$y = (x + 4)^3$	$y = x^3 - 4$	$y = x^3 + 4$	$y = 4x^3$

23.7. На якому з рисунків зображено графік функції  $y = \sqrt{x+1}$  ?



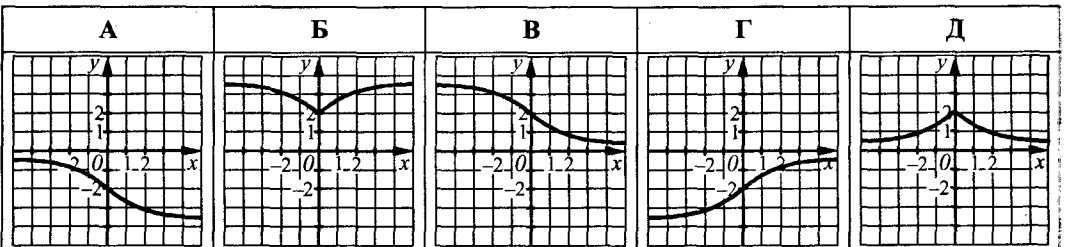
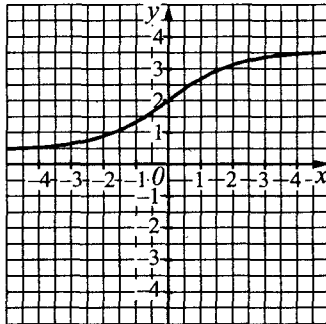
23.8. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка функції  $y = \sin x$  у результаті його розтягування від осі  $y$  у 8 разів?

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{8} \sin x$	$y = 8 \sin x$	$y = \sin \frac{x}{8}$	$y = \sin 8x$	$y = \sin x + 8$

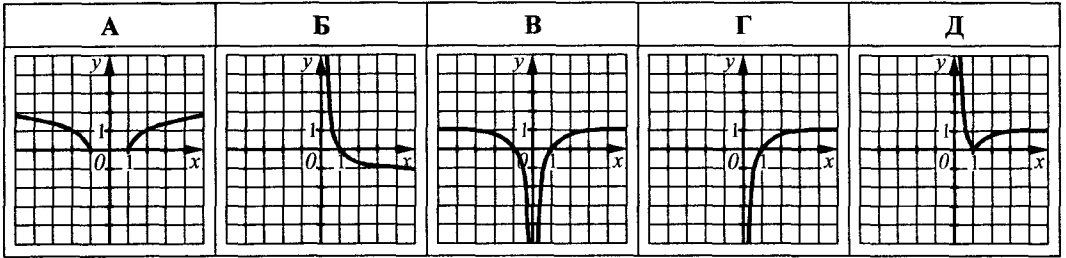
23.9. Областю визначення функції  $y = f(x)$  є проміжок  $[-4; 6]$ . Знайти область визначення функції  $y = f(2x)$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-8; 12]$	$[-2; 3]$	$[-4; 3]$	$[-2; 8]$	НЕ МОЖНА ВИЗНАЧИТИ

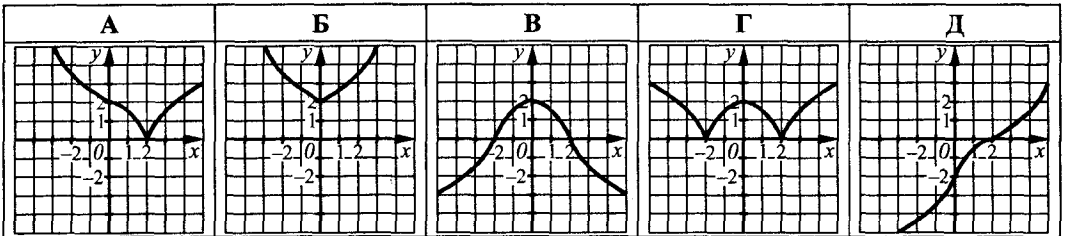
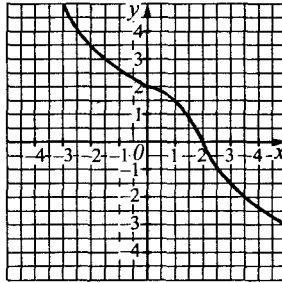
23.10. На рисунку зображено ескіз графіка функції  $y = f(x)$ . На якому з рисунків зображено ескіз графіка функції  $y = f(-x)$  ?



23.11. На якому з рисунків зображено графік функції  $y = |\log_2 x|$ ?



23.12. На рисунку зображено графік функції  $y = f(x)$ . На якому з рисунків зображено графік функції  $y = f(|x|)$ ?



23.13. Графік функції  $y = x^3$  зсунули ліворуч на 4 одиниці й відобразили симетрично відносно осі  $x$ . Графік якої функції отримали в результаті таких перетворень?

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
$y = -(x - 4)^3$	$y = -(x + 4)^3$	$y = (-x)^3 - 4$	$y = (-x)^3 + 4$	$y = (x + 4)^3$

23.14. Область значень функції  $y = f(x)$  є проміжок  $[-2; 2]$ . Знайти область значень функції  $y = 4f(x) - 3$ .

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
$[-20; -4]$	$[-2; 2]$	$[-3,5; -2,5]$	$[-11; 5]$	$[0; 5]$

23.15. У результаті яких послідовних перетворень із графіка функції  $y = f(x)$  можна отримати графік функції  $y = f(2x + 6)$ ?

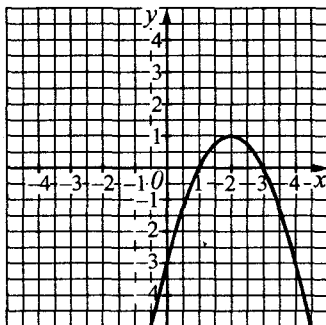
<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
Стиском до осі $y$ удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 6 одиниць	Розтягом від осі $y$ удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 6 одиниць	Стиском до осі $y$ удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 3 одиниці	Стиском до осі $y$ удвічі й паралельним перенесенням праворуч на 3 одиниці	Розтягом від осі $y$ удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 3 одиниці

23.16. Область визначення функції  $y=f(x)$  є проміжок  $[0; 2]$ . Знайти область визначення

функції  $y=f\left(\frac{x}{2}-4\right)$ .

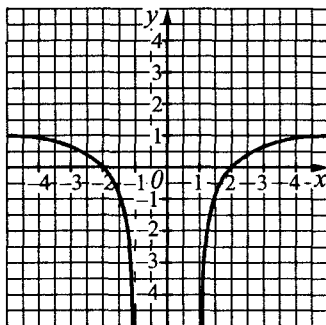
А	Б	В	Г	Д
$[-4; -2]$	$[4; 5]$	$[-8; -4]$	$[4; 8]$	$[8; 12]$

23.17. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
$y=(x+2)^2+1$	$y=-(x-2)^2+1$	$y=-(x-2)^2-1$	$y=(-x-2)^2+1$	$y=-(x-2)^2-1$

23.18. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?

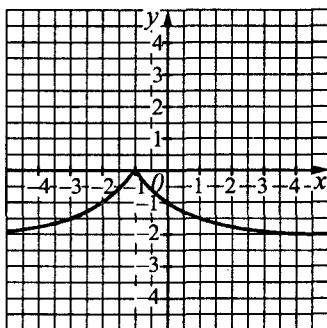


А	Б	В	Г	Д
$y= \ln(x-1) $	$y= \ln(x+1) $	$y=\ln( x +1)$	$y=\ln( x -1)$	$y=\ln( x -2)$

23.19. На якому з рисунків зображено графік функції  $y=\frac{x-1}{x-2}$ ?

А	Б	В	Г	Д

23.20. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{ x +1}$	$y = \sqrt{ x -1}$	$y = -\sqrt{ x+1 }$	$y = -\sqrt{ x +1}$	$y = -\sqrt{x+1}$

Завдання 23.21–23.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

23.21. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх графіками (А–Д).

1  $y = \frac{x-4}{x+2}$

2  $y = 3^{\frac{1}{\log_x 3} - 2}$

3  $y = \sqrt{-1-x}$

4  $y = -|x-2|$

А	Б	В	Г	Д

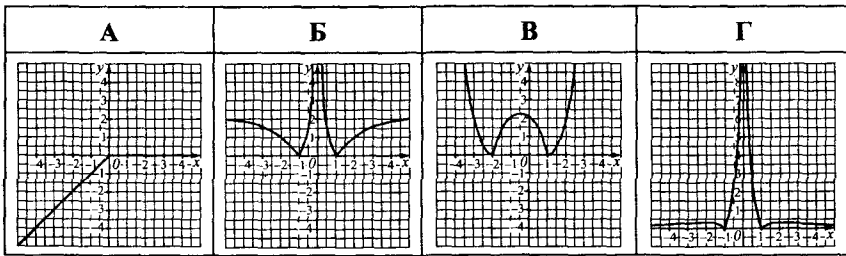
23.22. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх графіками (А–Д).

1  $y = \frac{x-|x|}{2}$

2  $y = x^2 - 2|x| - 8$

3  $y = |-x^2 - x + 2|$

4  $y = |\log_2 |x||$



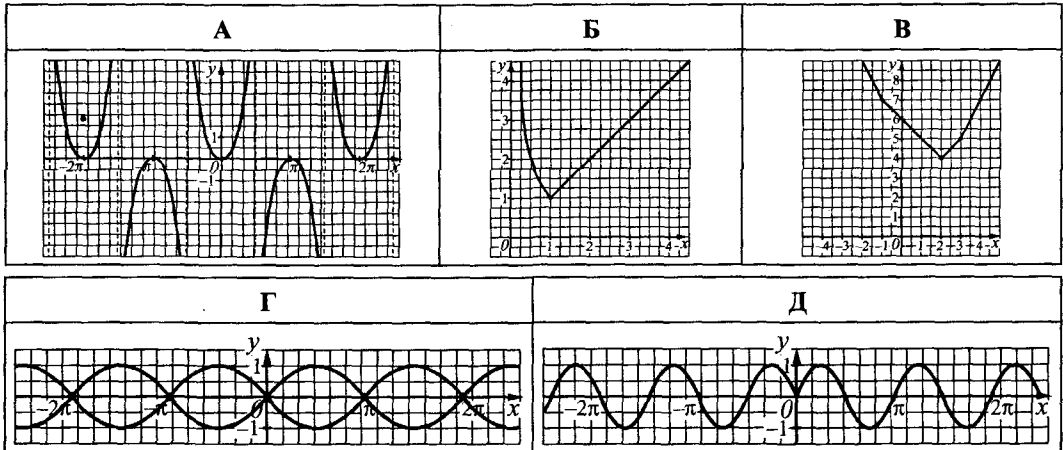
23.23. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх графіками (А–Д).

1  $y = \frac{|x|}{x} \sin 2x$

2  $y = |x+1| + |x-2| + |x-3|$

3  $y = 3^{\log_3 x}$

4  $y = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$



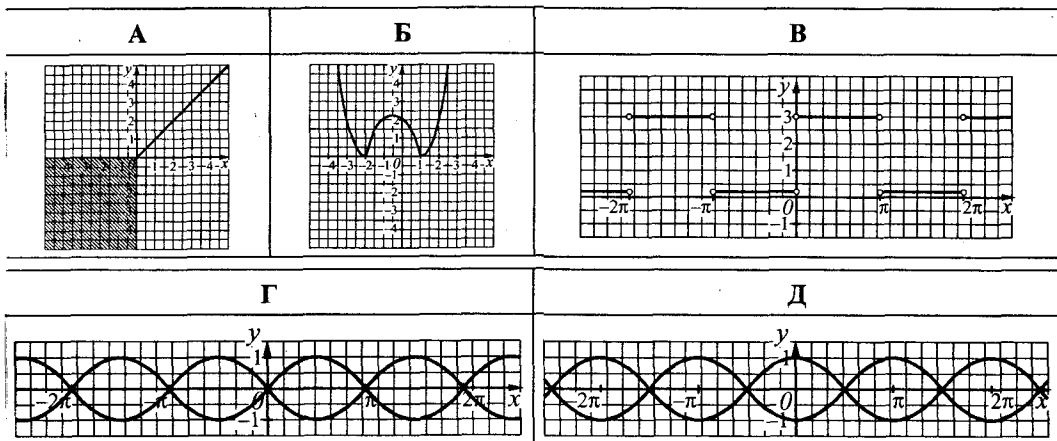
23.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх графіками (А–Д).

1  $y = 3^{\frac{\sin x}{|\sin x|}}$

2  $x + |x| = y + |y|$

3  $|y| = |\sin x|$

4  $|y| = |\cos x|$



**23.25.** Задано функцію  $y = f(x)$  з множиною значень  $[-2; 5]$ . Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми множинами значень (А–Д).

- |                  |              |
|------------------|--------------|
| 1 $y = f(x) + 2$ | А $[0; 5]$   |
| 2 $y = -f(x)$    | Б $[-4; 10]$ |
| 3 $y = 2f(x)$    | В $[2; 5]$   |
| 4 $y =  f(x) $   | Г $[0; 7]$   |
|                  | Д $[-5; 2]$  |

**23.26.** Задано функцію  $y = \varphi(x)$  з областю визначення  $[-4; 10]$ . Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми областями визначення (А–Д).

- |                            |              |
|----------------------------|--------------|
| 1 $y = \varphi(x + 4)$     | А $[-4; 10]$ |
| 2 $y = \varphi(x - 4)$     | Б $[0; 14]$  |
| 3 $y = \varphi(x) + 5$     | В $[4; 18]$  |
| 4 $y = \varphi(x - 5) - 3$ | Г $[1; 15]$  |
|                            | Д $[-8; 6]$  |

**23.27.** Задано функцію  $y = h(x)$  з областю визначення  $[-2; 6]$ . Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми областями визначення (А–Д).

- |                                   |              |
|-----------------------------------|--------------|
| 1 $y = h\left(\frac{x}{2}\right)$ | А $[0; 6]$   |
| 2 $y = h(2x)$                     | Б $[-6; 2]$  |
| 3 $y = h(-x)$                     | В $[-4; 12]$ |
| 4 $y = h( x )$                    | Г $[-6; 6]$  |
|                                   | Д $[-1; 3]$  |



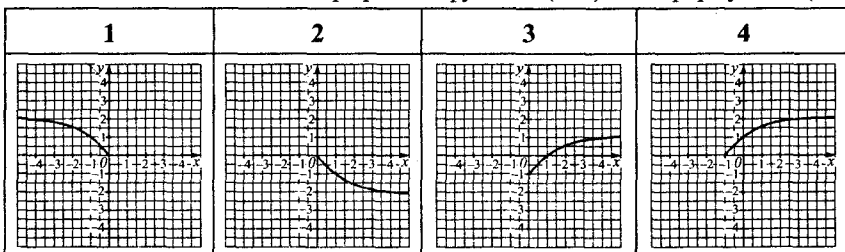
23.28. Установити відповідність між геометричними перетвореннями графіка функції  $y = \sin x$  (1–4) та функціями, одержаних у результаті цих перетворень (А–Д).

- |  |                            |
|--|----------------------------|
| 1 Графік функції $y = \sin x$ паралельно перенесли вздовж осі $x$ на 3 одиниці ліворуч | А $y = \sin 3x$            |
| 2 Графік функції $y = \sin x$ паралельно перенесли вздовж осі $y$ на 3 одиниці вниз    | Б $y = \frac{1}{3} \sin x$ |
| 3 Графік функції $y = \sin x$ стиснули до осі $x$ утричі                               | В $y = \sin(x-3)$          |
| 4 Графік функції $y = \sin x$ стиснули до осі $y$ утричі                               | Г $y = \sin(x+3)$          |
|  | Д $y = \sin x - 3$         |

23.29. Установити відповідність між геометричними перетвореннями графіка функції  $y = \cos x$  (1–4) та функціями, одержаних у результаті цих перетворень (А–Д).

- |  |                   |
|--|-------------------|
| 1 Графік функції $y = \cos x$ симетрично відобразили відносно осі $x$  | А $y =  \cos x $  |
| 2 Графік функції $y = \cos x$ симетрично відобразили відносно осі $y$  | Б $y =  \cos x  $ |
| 3 Частину графіка функції $y = \cos x$ , яка лежить вище від осі $x$ і на самій осі, залишили без змін, а частину, яка лежить нижче від осі $x$ , відобразили симетрично відносно цієї осі | В $y = \cos x $   |
| 4 Першу частину графіка функції $y = \cos x$ , яка лежить праворуч від осі $y$ і на самій осі, залишили без змін, а другу частину замінили симетричною до першої відносно осі $y$          | Г $y = \cos(-x)$  |
|  | Д $y = -\cos x$   |

23.30. Установити відповідність між графіками функцій (1–4) та їх формулами (А–Д).



А  $y = \sqrt{x-1}$

В  $y = \sqrt{x+1}$

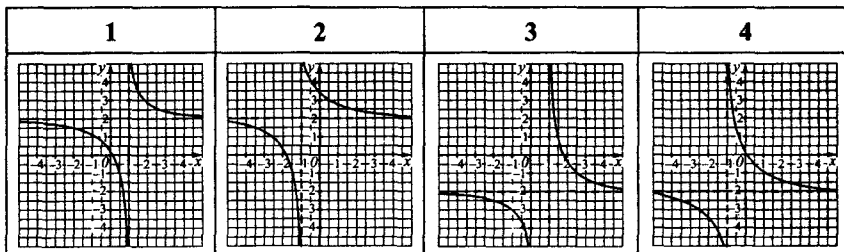
Б  $y = \sqrt{x-1}$

Г  $y = \sqrt{-x}$

Д  $y = -\sqrt{x}$

23.31. Установити відповідність між графіками функцій (1–4), утворених із графіка функції

$$y = \frac{1}{x}, \text{ та їх формулами (А–Д).}$$



А  $y = \frac{1}{x+1} + 2$

В  $y = \frac{1}{x-1} + 2$

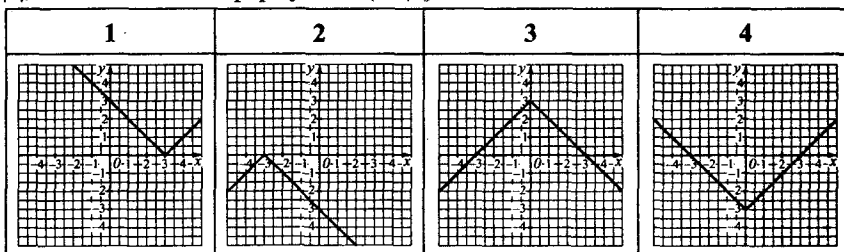
Б  $y = \frac{1}{x-1} - 2$

Г  $y = \frac{1}{x-2} + 1$

Д  $y = \frac{1}{x+1} - 2$

23.32. Установити відповідність між графіками функцій (1–4), утворених із графіка функції

$$y = |x|, \text{ та відповідними формулами (А–Д).}$$



А  $y = |x + 3|$

В  $y = |x - 3|$

Б  $y = -|x| + 3$

Г  $y = -|x + 3|$

Д  $y = |x| - 3$

## ТЕМА 24. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ, ЇЇ ГЕОМЕТРИЧНИЙ І МЕХАНІЧНИЙ ЗМІСТ

*Похідною функції*  $y = f(x)$  у точці  $x$  називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля. Похідну функції позначають  $y'$  або  $f'(x)$ .

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**Таблиця похідних.**

- $(C)' = 0$ ,  $C$  – константа;
- $(x)' = 1$ ;
- $(ax + b)' = a$ ;
- $(x^n)' = nx^{n-1}$ ;
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;
- $(a^x)' = a^x \ln a$ ;
- $(e^x)' = e^x$ ;
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ;
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ;
- $(\sin x)' = \cos x$ ;
- $(\cos x)' = -\sin x$ ;
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ;
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .

**Правила диференціювання.**

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ ;
- $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$ ;
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ ;
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ .

**Похідна складеної функції:**  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ .

**Приклад 1.** Знайти похідні: а)  $(5x^3 + 8x - 11)'$ ; б)  $(x^2 \cos x)'$ ; в)  $(\sin(3x^2))'$ ; г)  $(\sqrt{6x^4 + 1})'$ .

■ а)  $(5x^3 + 8x - 11)' = (5x^3)' + (8x)' - 11' = 5(x^3)' + 8(x)' - 0 = 15x^2 + 8$ ;

б)  $(x^2 \cos x)' = (x^2)' \cos x + (\cos x)' x^2 = 2x \cos x + (-\sin x)x^2 = 2x \cos x - x^2 \sin x$ ;

в)  $(\sin(3x^2))' = \cos(3x^2) \cdot (3x^2)' = \cos(3x^2) \cdot 6x = 6x \cos(3x^2)$ .

г)  $(\sqrt{6x^4 + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{6x^4 + 1}} \cdot (6x^4 + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{6x^4 + 1}} \cdot 24x^3 = \frac{12x^3}{\sqrt{6x^4 + 1}}$ . ■

**Фізичний зміст похідної.** Похідна функції  $y = f(x)$  у точці  $x_0$  виражає швидкість зміни функції або процесу, який ця функція описує, у цій точці. Так, якщо функція  $S = S(t)$  описує

рух матеріальної точки, тобто залежність пройденної відстані  $s$  від часу  $t$ , то її похідна задає залежність швидкості  $v$  матеріальної точки від часу  $t$ :  $S'(t) = v(t)$ ; похідна швидкості  $v = v(t)$  за часом є прискоренням:  $v'(t) = a(t)$ .

**Приклад 2.** Тіло, маса якого дорівнює 5 кг, рухається прямолінійно за законом  $s(t) = t^2 + t + 4$ , де  $S$  — відстань у метрах,  $t$  — час у секундах. Знайти: 1) початкову швидкість тіла; 2) швидкість тіла через 3 с після початку руху; 3) прискорення тіла.

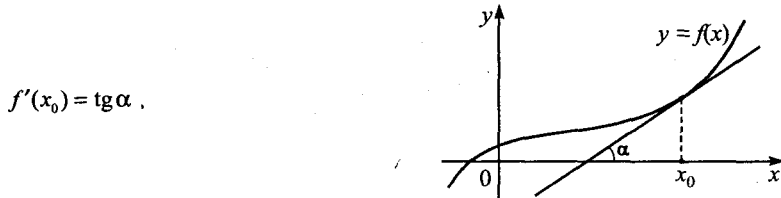
■  $v(t) = S'(t) = (t^2 + t + 4)' = 2t + 1$ .

1) Початкова швидкість — це швидкість, якщо  $t = 0$  с. Тому  $v_0 = v(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$  (м/с).

2)  $v(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$  (м/с).

3)  $a(t) = v'(t) = (2t + 1)' = 2$ . Отже, прискорення, з яким рухається тіло, дорівнює  $2 \text{ м/с}^2$ . ■

**Геометричний зміст похідної** полягає у тому, що значення похідної функції  $y = f(x)$  у точці дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в цій точці:



**Рівняння дотичної до графіка функції  $y = f(x)$  у точці  $x_0$ :**  $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ .

**Приклад 3.** Яка з послідовностей не має границі?

А	Б	В	Г	Д
$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$x_n = 0,99^n$	$x_n = \frac{2n-1}{2n}$	$x_n = (\sqrt{3})^n$	Усі послідовності мають границі

■  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n} = 0$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} (0,99)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 \frac{1}{99}\right)^n} = 0$ ;

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{2} = 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1,73\dots)^n$  — члени послідовності можуть стати

як завгодно великими. Отже, послідовність границі немає.

Відповідь. Г. ■

**Приклад 4.** Знайти  $f'(0,75)$ , якщо  $f(x) = 5e^{4x-3} - 8$ .

А	Б	В	Г	Д
$20e$	20	10	7	5

■ Знайдемо спочатку похідну  $f'(x)$  функції  $f(x) = 5e^{4x-3} - 8$  як похідну складеної функції. Отримаємо:  $f'(x) = (5e^{4x-3} - 8)' = 5(e^{4x-3})' = 5 \cdot e^{4x-3} \cdot (4x-3)' = 5 \cdot e^{4x-3} \cdot 4 = 20e^{4x-3}$ . Як-що  $x = 0,75$ , то  $f'(0,75) = 20e^{4 \cdot 0,75 - 3} = 20e^0 = 20$ .

Відповідь. Б. ■

**Приклад 5.** Знайти похідну функції  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4} \operatorname{tg} x$	-1	$\frac{\sin \frac{x}{4}}{\cos \frac{x}{4}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{4}}$

■  $f'(x) = \left( \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right)' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{4}} \cdot \left( \frac{x}{4} \right)' = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{4}}$ .

Відповідь. Д. ■

**Приклад 6.** Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, яку проведено до графіка функції  $y = 5x^2 - 3x + 2$  в точці з абсцисою  $x_0 = 2$ .

А	Б	В	Г	Д
16	Інша відповідь	0,3	0	19

■ Щоб знайти кутовий коефіцієнт  $k$  дотичної  $y = kx + b$ , немає потреби складати рівняння дотичної, а досить лише скористатися властивістю, що  $k = y'(x_0)$ . Отримуємо:  $y' = (5x^2 - 3x + 2)' = 10x - 3$ .  $k = y'(2) = 10 \cdot 2 - 3 = 17$ .

Серед числових значень запропонованих відповідей відповіді 17 немає, тому правильною є відповідь, позначена літерою Б — «Інша відповідь».

Відповідь. Б. ■

**Приклад 7.** Вказати функцію, для якої рівняння  $3x - y - 2 = 0$  є рівнянням дотичної до її графіка в точці  $A(1; 1)$ .

А	Б	В	Г	Д
$y = x^3$	$y = \sin x$	$y = \frac{2}{x-1}$	$y = x^2$	$y = (x-1)^2$

■ Функції  $y = \sin x$ ,  $y = \frac{2}{x-1}$ ,  $y = (x-1)^2$  не проходять через точку  $A(1; 1)$ , тому вони не можуть мати дотичної у цій точці. Для функції  $y = x^3$  маємо:  $y' = 3x^2$ ;  $y'(1) = 3$ . За формулою дотичної  $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$  отримаємо:  $y - 1 = 3(x - 1)$ ;  $3x - y - 2 = 0$  — рівняння дотичної. Для функції  $y = x^2$ :  $y' = 2x$ ;  $y'(1) = 2$ . Кутовий коефіцієнт дотичної  $k = 2$  не збігається з кутовим коефіцієнтом прямої  $y = 3x - 2$ .

Відповідь. А. ■

Завдання 24.1–24.27 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

24.1.  $(x^6 + 3x^2 - x + 3)' = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^7}{7} + x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$	$6x^5 + 6x$	$6x^5 + 6x - 1$	$6x^5 + 6x - 3$	$\frac{x^7}{7} + x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + 1$

24.2.  $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right)' = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{3}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{3x^2} + 2\sqrt{x}$	$\frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2}$

24.3.  $\left(\frac{1}{8}\cos x - 3\operatorname{tg} x\right)' = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-8\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{8}\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{8}\sin x - \frac{3}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{8}\sin x - 3\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{8}\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}$

24.4. Знайти похідну функції  $y = 5\sin 7x - 7x^2 + 7$ .

А	Б	В	Г	Д
$5\cos 7x - 14x$	$35\cos 7x - 7x$	$35\cos 7x - 14x$	$7\cos 7x - 7x + 7$	$5\cos 7x - 7x$

24.5. Знайти похідну функції  $y = \ln(2x) + 2x^3 - 3$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{x} + 6x^2 - 3x$	$\frac{1}{2x} + 6x^2 - 3$	$\frac{1}{2x} + 6x^2$	$\frac{1}{x} + 6x^2$	$\frac{2}{x} + 6x^2$

24.6.  $(x^5 \cdot 7^x)' = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$5x^4 \cdot 7^x + x^5 \cdot 7^x \lg 7$	$5x^4 \cdot 7^x \ln 7$	$5x^4 \cdot 7^x \lg 7$	$5x^4 \cdot 7^x + x^5 7^x \cdot \ln 7$	$5x^4 + 7^x \ln 7$

24.7.  $\left(\frac{\ln x}{x^4}\right)' = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\frac{1}{x} x^4 - 4x^3 \ln x}{x^8}$	$\frac{1}{4x^3}$	$\frac{\ln x}{4x^3}$	$\frac{\frac{1}{x} x^4 - 4x^3 \ln x}{x^4}$	$\frac{-\frac{1}{x} x^4 - 4x^3 \ln x}{4x^3}$

24.8.  $(e^{3x+5})' = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}e^{3x+5}$	$3e^x$	$(3x+5)e^{3x+5}$	$3e^{3x+5}$	$e^{3x+5}$

24.9. Знайти похідну функції  $y = \cos 3x$  у точці  $x_0 = \frac{\pi}{18}$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

24.10. Знайти кут, який утворює з додатним напрямом осі  $Ox$  дотична до графіка функції  $y = \frac{1}{4}x^4$  у точці  $x_0 = -1$ .

А	Б	В	Г	Д
$30^\circ$	$45^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$

24.11. Рівняння дотичної до кривої  $y = 2x^2 - 4x - 1$  має вигляд:  $y = 8x - 19$ . Визначити абсцису точки дотику.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	-4	8

24.12. Скласти рівняння дотичної до графіка функції  $y = x^3$  у точці  $(2; 8)$ .

А	Б	В	Г	Д
$y + 8 = 12(x + 2)$	$y - 8 = \frac{1}{12}(x - 2)$	$y - 8 = x - 2$	$y - 8 = 8(x - 2)$	$y - 8 = 12(x - 2)$

24.13. На кривій  $f(x) = x^2 - x + 1$  знайти точку, в якій дотична до кривої паралельна до прямої  $3x - y - 1 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(2; 3)$	$(0; 3)$	$(0; 1)$	2	3

24.14. Знайти усі значення параметра  $a$ , за яких числа  $x_1, \sqrt{a^2 + 3}, x_2$  утворюють геометричну прогресію, якщо  $x_1$  та  $x_2$  — абсциси точок графіка функції  $f(x) = x^3 + 7x^2 + (2 - 9a)x$ , у яких дотичні до графіка нахилені до осі абсцис під кутом  $135^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
-1	1	0	0; 1	-1; 0

24.15. Знайти миттєву швидкість точки, яка рухається за законом  $S(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t + 1$  ( $S$  — шлях у метрах,  $t$  — час у секундах) через 3 с після початку руху.

А	Б	В	Г	Д
12 м/с	13 м/с	14 м/с	15 м/с	16 м/с

24.16. Тіло рухається за законом  $s(t) = t^2 - 4\sqrt{t}$ . Знайти швидкість тіла в момент  $t_0 = 4$ .

А	Б	В	Г	Д
5	4,75	12	7	7,875

24.17. Обчислити  $f'(x)$ , якщо  $f(x) = \sin 5 + e^3$ .

А	Б	В	Г	Д
$\cos 5 + 3e^2$	$\sin 5 + e^3$	$\cos 5$	0	$3e^2$

24.18. Обчислити  $f'(x)$ , якщо  $f(x) = \ln \cos x^2$ .

А	Б	В	Г	Д
$-2x \operatorname{tg} x^2$	$-\operatorname{tg} x^2$	$\frac{2x}{\cos x^2}$	$-2 \operatorname{tg} x^2$	$2x \operatorname{tg} x^2$

24.19. Обчислити  $f'(x)$ , якщо  $f(x) = \sin^2(2x + 0,5)$ .

А	Б	В	Г	Д
$2(2x + 0,5) \cos^2 x x \times (2x + 0,5)$	$2 \cos(4x + 1)$	$-2 \cos(4x + 1)$	$2 \sin(4x + 1)$	$-2 \sin(4x + 1)$

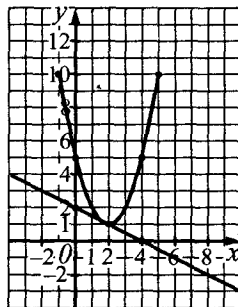
24.20. Обчислити значення похідної функції  $y = (3x + 1)^3 \cdot \cos^3(x^2 + 2x + 1) + \pi^3$  у точці  $x_0 = -1$ .

А	Б	В	Г	Д
36	12	-12	0	$36 + \pi^3$

24.21. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом  $s(t) = 2,5t^2 - 15t$ ,  $S$  — шлях у метрах,  $t$  — час у секундах. Через який час від початку руху ця точка зупинилася?

А	Б	В	Г	Д
1 с	2 с	3 с	3,5 с	4 с

24.22. На рисунку зображено графік функції і дотичну до нього в точці з абсцисою  $x_0$ . Знайти значення  $f'(x_0)$ .



А	Б	В	Г	Д
5	-2	2	0,5	-0,5



24.23. Дано функцію  $y = |3x + 2|$ . У якій точці функція не має похідної?

А	Б	В	Г	Д
2	-2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$	Похідна існує в будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$

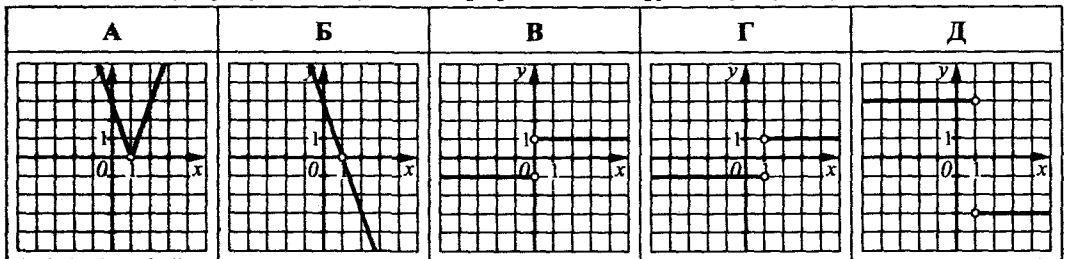
24.24. Обчислити похідну функції  $y = |2x - 5|$  на проміжку  $(-\infty; 0]$ .

А	Б	В	Г	Д
2,5	5	-5	2	-2

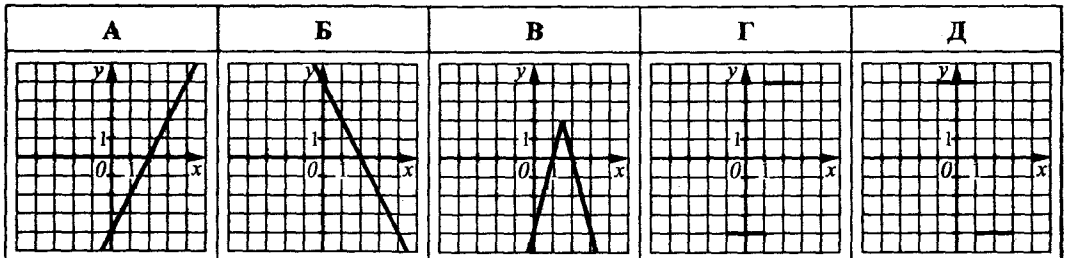
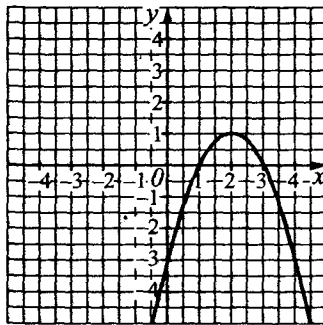
24.25.  $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-19)(x-20)$ . Знайти  $f'(0)$ .

А	Б	В	Г	Д
-20!	20!	0	1	20

24.26. На якому з рисунків побудовано графік похідної функції  $y = |1 - x|$ ?



24.27. На рисунку зображено графік функції  $y = f(x)$ . Серед наведених графіків вказати графік функції  $y = f'(x)$ .



Завдання 24.28–24.38 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

24.28. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1 $f(x) = \sin(2x + 3)$         | А $f'(x) = -2 \sin(x + 3)$      |
| 2 $f(x) = 2 \cos(x + 3)$        | Б $f'(x) = \sin 2(x + 3)$       |
| 3 $f(x) = \sin^2(x + 3)$        | В $f'(x) = 2 \sin(2x + 3)$      |
| 4 $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ | Г $f'(x) = 2 \cos(2x + 3)$      |
|                                 | Д $f'(x) = \frac{2}{\cos^2 2x}$ |

24.29. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

- |   |  |
|---|--|
| 1 $f(x) = 2 \sin^2(3x - 4) + \cos x$              | А $f'(x) = \frac{3 \cos x - 0,5 \sin(6x - 8) \cdot \sin x}{\cos^2(3x - 4)}$            |
| 2 $f(x) = 2 \sin(3x - 4) \cdot \cos x$            | Б $f'(x) = 6 \sin(6x - 8) - \sin x$  |
| 3 $f(x) = \frac{2 \sin(3x - 4)}{\cos x}$          | В $f'(x) = \frac{6 \cos(3x - 4) \cdot \cos x + 2 \sin(3x - 4) \cdot \sin x}{\cos^2 x}$ |
| 4 $f(x) = \operatorname{tg}(3x - 4) \cdot \cos x$ | Г $f'(x) = -2 \cos(3x - 4) \cdot \sin x$   |
|   | Д $f'(x) = 6 \cos(3x - 4) \cdot \cos x - 2 \sin(3x - 4) \cdot \sin x$                  |

24.30. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

- |                         |                       |
|-------------------------|-----------------------|
| 1 $y = \frac{x}{3} + 5$ | А $y' = -3$           |
|                         | Б $y' = 5$            |
| 2 $y = 5 - \frac{x}{3}$ | В $y' = -\frac{1}{3}$ |
| 3 $y = 3 + 5x$          | Г $y' = -5$           |
| 4 $y = 5 - 3x$          | Д $y' = \frac{1}{3}$  |

24.31. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

- |                          |                              |
|--------------------------|------------------------------|
| 1 $y = \sin 5 + e^5$     | А $y' = 5(\cos 5x + e^{5x})$ |
| 2 $y = \sin 5x + e^5$    | Б $y' = \cos 5x$             |
| 3 $y = \sin 5 + e^{5x}$  | В $y' = 5e^{5x}$             |
| 4 $y = \sin 5x + e^{5x}$ | Г $y' = 5 \cos 5x$           |
|                          | Д $y' = 0$                   |

24.32. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

1  $y = 4x^4 - \frac{2}{x^2}$

А  $y' = x^3 + \frac{1}{x^3}$

2  $y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2}$

Б  $y' = x^3 - \frac{4}{x^3}$

3  $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{x^2}$

В  $y' = 16x^3 + \frac{4}{x^3}$

4  $y = 4x^4 - \frac{1}{2x^2}$

Г  $y' = 16x^3 + \frac{1}{x^3}$

Д  $y' = x^3 + \frac{4}{x^3}$

24.33. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх похідними (А–Д).

1  $y = \cos x \cos 7x - \sin x \sin 7x$

А  $y' = 8\cos 8x$

2  $y = \cos x \cos 7x + \sin x \sin 7x$

Б  $y' = 6\cos 6x$

3  $y = \sin 7x \cos x - \sin x \cos 7x$

В  $y' = 8\sin 8x$

4  $y = \sin 7x \cos x + \sin x \cos 7x$

Г  $y' = -8\sin 8x$

Д  $y' = -6\sin 6x$

24.34. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх похідними (А–Д).

1  $y = x \sin 3$

А  $y' = 3\sin^2 x \cos x$

2  $y = 3 \sin x$

Б  $y' = \cos 3$

3  $y = \sin x^3$

В  $y' = 3x^2 \cos x^3$

4  $y = \sin^3 x$

Г  $y' = \sin 3$

Д  $y' = 3 \cos x$

24.35. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх похідними в точці  $\pi$  (А–Д).

1  $y = \sin \frac{x}{3}$

А  $-3$

2  $y = \sin 3x$

Б  $-\frac{1}{3}$

3  $y = \frac{\sin x}{3}$

В  $0$

4  $y = \frac{\cos x}{3}$

Г  $\frac{1}{6}$

Д  $1$

24.36. Установити відповідність між залежностями відстані  $S$  від часу  $t$  руху матеріальних тіл (1–4) та їх швидкостями в момент часу  $t = 1$  (А–Д).

- |                                 |                  |
|---------------------------------|------------------|
| 1 $S(t) = 8\frac{1}{3}t^3 + 5t$ | А 4              |
| 2 $S(t) = 4t + 1$               | Б 5              |
| 3 $S(t) = \frac{t^2}{3} + 5t$   | В $5\frac{1}{3}$ |
| 4 $S(t) = 2t^2 + t$             | Г $5\frac{2}{3}$ |
|                                 | Д 30             |

24.37. Установити відповідність між залежностями відстані  $S$  від часу  $t$  руху матеріальних тіл (1–4) та часом від початку руху до зупинки тіла (А–Д).

- |                                    |                 |
|------------------------------------|-----------------|
| 1 $S(t) = \frac{t^3}{3} - t$       | А $\frac{1}{2}$ |
| 2 $S(t) = \frac{t^4}{4} - t^3 + 2$ | Б 1             |
| 3 $S(t) = \frac{t^5}{5} - t^3 + 4$ | В $\sqrt{3}$    |
| 4 $S(t) = t^2 - t$                 | Г 3             |
|                                    | Д 4             |

24.38. Установити відповідність між функціями (1–4) та тангенсами кутів, які утворюють дотичні, проведені до графіків функцій у точці з абсцисою  $x = 0$  з додатним напрямком осі  $x$  (А–Д).

- |  |     |
|--|-----|
| 1 $y = e^{2x}$                         | А 0 |
| 2 $y = 2\sin 4x$                       | Б 1 |
| 3 $y = 8\cos x$                        | В 2 |
| 4 $y = 2\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ | Г 4 |
|  | Д 8 |

Розв'яжіть завдання 24.39–24.51. Відповідь запишіть десятковим дробом.

24.39. Обчислити значення похідної функції  $y = \sqrt{\operatorname{tg} 6x}$  у точці  $x_0 = \frac{\pi}{24}$ .

24.40. Обчислити значення похідної функції  $y = (2x^2 - 1)\ln^2 x$  у точці  $x_0 = 1$ .

24.41. Знати похідну функції  $y = \sqrt[3]{1 + \cos^3 x}$  у точці  $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ .

24.42. Знати похідну функції  $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$  у точці  $x_0 = 1$ .

24.43. Записати рівняння дотичної до графіка функції  $y = 5x^2 - 2x$ , яка утворює з додатним напрямком осі  $Ox$  кут  $135^\circ$ . У відповідь записати абсцису точки дотику.

- 24.44. Скласти рівняння дотичної до графіка функції  $f(x) = e^{5x+1}$ , яка паралельна до прямої  $y = 5x - 8$ . У відповідь записати абсцису точки дотику.
- 24.45. За яких від'ємних значень  $a$  пряма  $y = ax - 5$  дотикається до кривої  $y = 3x^2 - 4x - 2$ ?
- 24.46. Пряма  $y = -\frac{3}{4}x + C$  є дотичною до лінії, заданої рівнянням  $y = 0,5x^4 - x$ . Знайти абсцису точки дотику.
- 24.47. Знайти тангенс додатного кута, під якими парабола  $y = x^2 + 2x - 8$  перетинає вісь абсцис.
- 24.48. Обчислити площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  у точці з абсцисою  $x_0 = 2$ . У відповідь записати наближене значення площі з точністю до 0,01.
- 24.49. Знайти похідну функції  $y = \sqrt{6 + 6 \cos^2 x^2}$  у точці  $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . У відповідь записати  $\frac{f'(x_0)}{\sqrt{\pi}}$ .
- 24.50. Скласти рівняння прямої, не паралельної до осі абсцис, яка проходить через точку  $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$  і дотикається до графіка функції  $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ . У відповідь записати абсцису точки дотику.
- 24.51. За якого значення параметра  $a$  пряма  $y = \frac{x}{2}$  дотикається до кривої  $y = \sqrt{x} - a$ ?

## ТЕМА 25. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Якщо для функції  $y=f(x)$  її похідна  $f'(x)$  додатна у кожній точці проміжку ( $f'(x) > 0$ ), то функція  $y=f(x)$  зростає на цьому проміжку, якщо  $f'(x) < 0$ , то функція  $y=f(x)$  спадає на цьому проміжку. Проміжки зростання та спадання функції називають проміжками монотонності.

Точки області визначення, у яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називають *критичними*.

Щоб дослідити функцію на монотонність, слід:

- 1) знайти критичні точки функції;
- 2) визначити знак похідної функції на кожному з проміжків, на які критичні точки розбивають область визначення функції;
- 3) якщо  $f'(x) > 0$ , то на проміжку функція зростає, якщо ж  $f'(x) < 0$ , то спадає.

Щоб дослідити функцію на екстремум, потрібно:

- 1) знайти критичні точки функції;
- 2) перевірити, чи змінює знак похідна функції при переході через критичну точку. Якщо при переході через критичну точку  $x$  (зліва направо) похідна  $f'(x)$  змінює знак із «+» на «-», то ця точка є точкою максимуму, а якщо з «-» на «+», то точкою мінімуму;
- 3) обчислити значення максимуму  $y_{\max}$  або мінімуму  $y_{\min}$ .

**Приклад 1.** Дослідити на монотонність та екстремум функцію  $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5$ .

$y' = \left( \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5 \right)' = x^2 - 6x$ . Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до нуля:

$x^2 - 6x = 0$ ;  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 6$ . Критичні точки — 0 та 6 — розбивають область визначення на три проміжки:  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 6)$ ,  $(6; +\infty)$ . Визначимо, який знак має похідна функції на кожному з проміжків. Для цього виберемо довільне число з проміжку  $(-\infty; 0)$ , наприклад,  $-10$ , і обчислимо відповідне значення похідної функції:  $y'(-10) = (-10)^2 - 6 \cdot (-10) = 160 > 0$ . Тобто на проміжку  $(-\infty; 0)$  похідна функції набуває лише додатних значень. Виконавши аналогічні обчислення, визначимо знак похідної на інших проміжках. Результати обчислень подамо таблицею:

$x$	$(-\infty; 0)$	$(0; 6)$	$(6; +\infty)$
$y'$	+	-	+

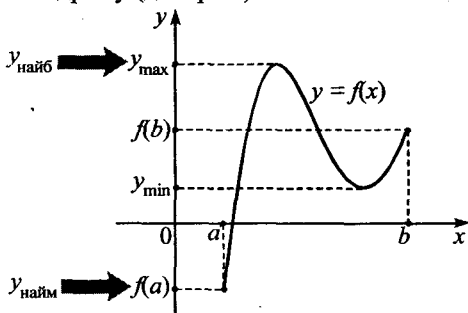
Оскільки на проміжках  $(-\infty; 0)$  та  $(6; +\infty)$  похідна набуває додатних значень, то функція на цих проміжках зростає. На проміжку  $(0; 6)$  похідна від'ємна, тому функція на ньому спадає.

Оскільки при переході через точку 0 похідна функції змінює знак з «+» на «-», то  $x = 0$  — точка максимуму. Максимум функції дорівнює:  $y_{\max} = y(0) = 5$ . При переході через

точку 6 похідна функції змінює знак з «-» на «+». Тому  $x = 6$  — точка мінімуму. Мінімум функції дорівнює:  $y_{\min} = y(6) = -31$ .

Щоб знайти найбільше та найменше значення неперервної на відрізку  $[a; b]$  функції, потрібно:

- 1) знайти всі критичні точки функції на інтервалі  $(a; b)$ ;
- 2) обчислити значення функції у кожній критичній точці та на кінцях відрізка;
- 3) вибрати найбільше та найменше з отриманих чисел — це є відповідно найбільше та найменше значення функції на відрізку (див. рис.).



**Приклад 2.** Яка з указаних функцій є зростаючою на всій області визначення?

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 0,4^x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = (\sqrt{3})^x$	$f(x) = 3$	Зростаючої функції немає

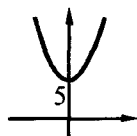
■  $f(x) = 0,4^x$ ,  $0 < 0,4 < 1$ , функція спадна;  $f(x) = x^2$ , функція спадна, якщо  $x \leq 0$ ;  
 $f(x) = (\sqrt{3})^x$ ,  $\sqrt{3} > 1$ , функція зростаюча;  $f(x) = 3$  — ні зростаюча, ні спадна.

Відповідь. В. ■

**Приклад 3.** Яка з указаних функцій має максимум у точці  $x_0 = 0$ ?

А	Б	В	Г	Д
$y = 7x^2 + 5$	$y = 2x^3 - 7$	$y = -3x^2 + 4$	$y = \frac{2x}{x+2}$	$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

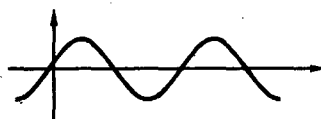
■ а) Функція  $y = 7x^2 + 5$  — не має максимуму взагалі (рис. а); б)  $y = 2x^3 - 7$  — не має максимуму взагалі; в)  $y = -3x^2 + 4$  — має максимум у точці  $x_0 = 0$ , бо  $y' = -6x$ ;  $y' = 0$ ;  $-6x = 0$ ;  $x = 0$  (рис. в); г)  $y = \frac{2x}{x+2}$  — не має максимуму взагалі; д)  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  — не має максимуму в точці  $x_0 = 0$  (рис. д).



а)



в)



д)

Відповідь. В. ■

**Приклад 4.** Знайти найбільше значення функції  $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$  на відрізку  $[-3; 0]$ .

■  $f'(x) = \left( \frac{x^2 + 8}{x - 1} \right)' = \frac{(x^2 + 8)' \cdot (x - 1) - (x - 1)' \cdot (x^2 + 8)}{(x - 1)^2} = \frac{2x \cdot (x - 1) - 1 \cdot (x^2 + 8)}{(x - 1)^2} =$   
 $= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 8}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2}$ .  $f(x) = 0$ ;  $\frac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2} = 0$ ;  $x^2 - 2x - 8 = 0$ ;  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 4$ . Порівняємо значення  $f(-3)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(0)$ .  $f(-3) = \frac{(-3)^2 + 8}{-3 - 1} = \frac{17}{-4} = -4\frac{1}{4}$ ;  $f(-2) = \frac{(-2)^2 + 8}{-2 - 1} = \frac{12}{-3} = -4$ ;  
 $f(0) = \frac{0^2 + 8}{0 - 1} = \frac{8}{-1} = -8$ . Найбільше значення  $f(-2) = -4$ . ■

**Завдання 25.1–25.24** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**25.1.** Визначити проміжок зростання функції  $y = x^2 - 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; 0]$

**25.2.** Знайти проміжки зростання функції  $y = f(x)$ , якщо  $f(x) = (x - 1)(x - 5)$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$	$[-5; -1]$	$[1; -5]$	$(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$	$(-\infty; -5]$

**25.3.** Знайти проміжки спадання функції  $y = \varphi(x)$ , якщо  $\varphi(x) = (x + 2)(x - 1)^2(x - 3)$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-3; 2]$	$(-\infty; -3] \text{ і } [-1; 2]$	$(-\infty; -2] \text{ і } [1; 3]$	$(-\infty; -2] \text{ і } [3; +\infty)$	$[-2; 3]$

**25.4.** Знайти проміжки зростання функції  $y = x^2 e^x$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; -2] \text{ і } [0; +\infty)$	$[-2; 0]$	$(-\infty; 0] \text{ і } [2; +\infty)$	$[0; 2]$

**25.5.** Знайти проміжки спадання функції  $y = \sin^2 x$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left[ \frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n \right]$ , $n \in \mathbb{Z}$	$\left[ \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right]$ , $n \in \mathbb{Z}$	$[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$ , $n \in \mathbb{Z}$	$\left[ \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right]$ , $n \in \mathbb{Z}$	$(-\infty; +\infty)$

**25.6.** Серед наведених функцій вибрати ту, яка є зростаючою на множині дійсних чисел.

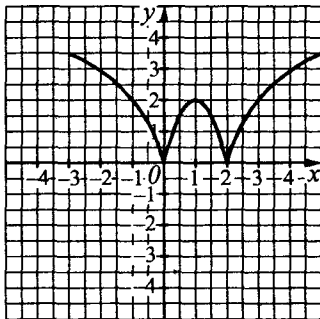
А	Б	В	Г	Д
$y = -x^7$	$y = \cos^2 x$	$y = \ln(x^2 + 1)$	$y = e^{x^3} z$	$y = e^{\frac{1}{x}}$



25.7. Серед наведених функцій вибрати ту, в якій проміжком спадання є проміжок  $[0; +\infty)$ .

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x^2 + 1}$	$y = xe^x$	$y = \ln(x^3 + 1)$	$y = e^{x^5}$	$y = e^{x^2}$

25.8. Скільки критичних точок має функція  $y = f(x)$ , зображена на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
Одну	дві	три	чотири	більше, ніж чотири

25.9. Знайти критичні точки функції  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ .

А	Б	В	Г	Д
0	$-3$ і $-1$	$-3$ і $1$	$1$ і $3$	$-1$ і $3$

25.10. Вказати критичні точки функції  $y = x(x - 4)^3$ .

А	Б	В	Г	Д
$0; 4$	$4$	$1; 4$	$3$	$1$

25.11. Знайти критичну точку функції  $y = 2x^2 - 4x$ .

А	Б	В	Г	Д
$-1$	$1$	$4$	$0$	$2$

25.12. Знайти критичні точки функції  $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$-2; 2; 0$	$-2; 2$	$2$	$2; 0$	$0$

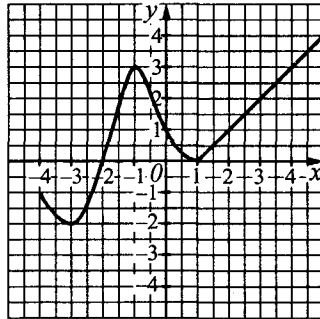
25.13. Знайти точки максимуму функції  $y = f(x)$ , якщо  $f'(x) = x(x + 3)(x - 5)$ .

А	Б	В	Г	Д
$-3$ і $5$	$-3$	$0$	$5$	$0$ і $5$

25.14. Знайти точки мінімуму функції  $y = f(x)$ , якщо  $f'(x) = x(x - 2)^2(x - 5)$ .

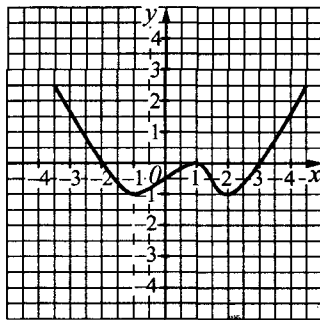
А	Б	В	Г	Д
$5$	$2$	$0$	$0$ і $5$	$0$ і $2$

25.15. Визначити усі критичні точки функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[-4; 4]$ , якщо на рисунку зображено графік функції  $y = f'(x)$ .



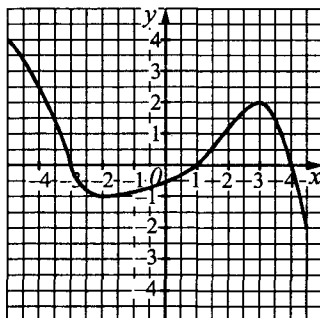
А	Б	В	Г	Д
$-3; -1$ і $1$	$-3$ і $-1$	$-2$ і $1$	$-4$ і $4$	$-3$ і $1$

25.16. Вказати усі точки екстремуму функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[-3; 4]$ , якщо на рисунку зображено графік функції  $y = f'(x)$ .



А	Б	В	Г	Д
$-1$ і $2$	$-1; 1$ і $2$	$-2; 1$ і $3$	$-2$ і $3$	$-3$ і $4$

25.17. Вказати проміжки зростання функції  $y = \varphi(x)$  на відрізку  $[-5; 5]$ , якщо на рисунку зображено графік функції  $y = \varphi'(x)$ .

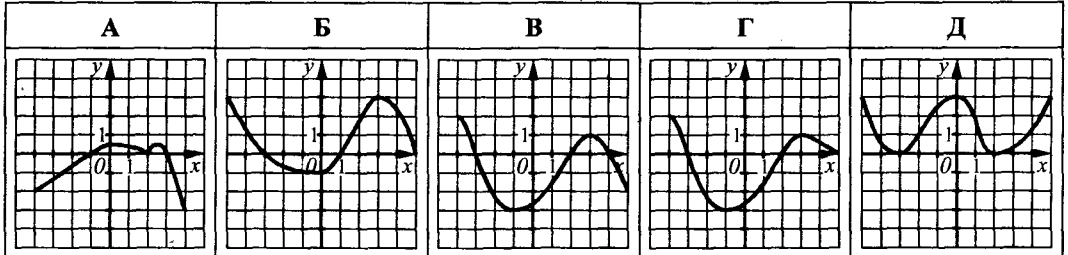


А	Б	В	Г	Д
$[-2; 3]$	$[-1; 2]$	$[-2; 1]$ і $[4; 5]$	$[1; 3]$	$[-5; -3]$ і $[1; 4]$

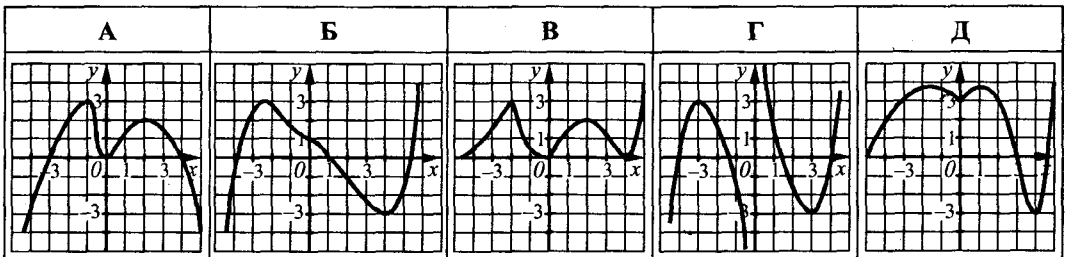
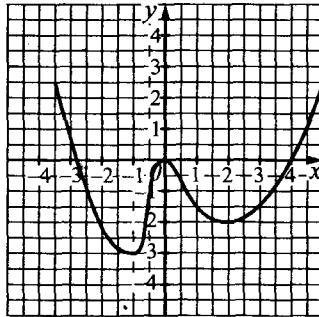
25.18. Функція  $y = f(x)$  визначена на множині дійсних чисел;  $-3$  і  $2$  — нулі функції. Зміну знаків похідної функції подано в таблиці.

$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 3)$	$3$	$(3; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(-1) = 0$	$f'(x) > 0$	$f'(3) = 0$	$f'(x) < 0$

Який з наведених графіків може бути графіком функції  $y = f(x)$ ?



25.19. На рисунку зображено графік функції  $y = f(x)$ . Який з наведених графіків може бути графіком функції  $y = f'(x)$ ?



25.20. Знайти точку, в якій функція  $y = x \ln x$  набуває найменшого значення.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	$e$	$e^2$

25.21. Знайти точку максимуму функції  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	1	$e$	$e^2$

25.22. За яких значень  $a$  функція  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + ax$  має критичні точки, але не має точок екстремумів?

А	Б	В	Г	Д
-1	-1 і 1	1	-4 і 4	4

25.23. За яких значень  $a$  точка 5 є точкою мінімуму функції  $y = f(x)$ , якщо  $f(x) = (x-5)(x-a)$ ?

А	Б	В	Г	Д
$a \geq 5$	$a = 5$	$a > 5$	$a \leq 5$	$a < 5$

25.24. За яких значень  $a$  точка 3 є точкою максимуму функції  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{a+3}{2}x^2 + 3ax$ ?

А	Б	В	Г	Д
$a = 3$	$a \geq 3$	$a \leq 3$	$a < 3$	$a > 3$

Завдання 25.25–25.35 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

25.25. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми властивостями (А–Д).

1  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

2  $y = 2^{|x|} + 2$

3  $y = 2^x + 2$

4  $y = -3x^2 + 7x - 14$

А Зростаюча на всій області визначення

Б Спадна на всій області визначення

В Має максимальне значення

Г Має найменше значення

Д Періодична

25.26. Установити відповідність між похідними  $f'(x)$  функцій (1–4) та проміжками спадання відповідних їм функцій  $f(x)$  (А–Д).

1  $f(x) = (x+1)(x-5)$

2  $f(x) = (x+1)(5-x)$

3  $f(x) = (x+1)^2(x-5)$

4  $f(x) = (x+1)(x-5)^2$

А  $(-\infty; -1]$

Б  $(-\infty; 5]$

В  $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$

Г  $[-5; 1]$

Д  $[-1; 5]$

25.27. Установити відповідність між похідними  $f'(x)$  функцій (1–4) та проміжками зростання відповідних їм функцій  $f(x)$  (А–Д).

- |                             |                                     |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| 1 $f(x) = (x + 3)(x - 4)$   | А $[4; +\infty)$                    |
| 2 $f(x) = (x + 3)(4 - x)$   | Б $[-3; +\infty)$                   |
| 3 $f(x) = (x + 3)^2(x - 4)$ | В $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$ |
| 4 $f(x) = (x + 3)(x - 4)^2$ | Г $[-3; 4]$                         |
|                             | Д $[-4; 3]$                         |

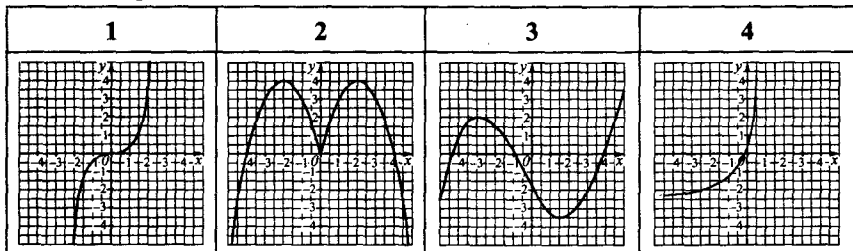
25.28. Установити відповідність між функціями (1–4) та проміжками спадання цих функцій (А–Д).

- |                          |                               |
|--------------------------|-------------------------------|
| 1 $y = -3x^5 - 4x$       | А $(-\infty; 1]$              |
| 2 $y = x^4 - 2x^2$       | Б $(-\infty; 0]$              |
| 3 $y = e^{x^2 - 2x + 3}$ | В $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$ |
| 4 $y = e^x - x$          | Г $[0; +\infty)$              |
|                          | Д $(-\infty; +\infty)$        |

25.29. Установити відповідність між функціями (1–4) та проміжками зростання цих функцій (А–Д).

- |                        |                                    |
|------------------------|------------------------------------|
| 1 $y = 3x - x^2$       | А $(-\infty; +\infty)$             |
| 2 $y = \sqrt{1 - x^2}$ | Б $[-1; 0]$                        |
| 3 $y = x - \ln x$      | В $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ |
| 4 $y = e^x + x - 1$    | Г $[1; +\infty)$                   |
|                        | Д $(-\infty; 1,5]$                 |

25.30. Установити відповідність між ескізами графіків функцій (1–4) та кількістю критичних точок цих функцій (А–Д).



- А Жодної  
 Б Одна  
 В Дві  
 Г Три  
 Д Чотири

25.31. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх критичними точками (А–Д).

- |                           |         |
|---------------------------|---------|
| 1 $y = x^5 - 5x$          | А 1     |
| 2 $y = x^2 + \frac{2}{x}$ | Б -1    |
| 3 $y = e^{x^2+2x}$        | В 0     |
| 4 $y = \sqrt{1-x^2}$      | Г 0; 2  |
|                           | Д -1; 1 |

25.32. Установити відповідність між похідними  $f'(x)$  функцій (1–4) та точками максимуму функцій  $f(x)$  (А–Д).

- |                           |         |
|---------------------------|---------|
| 1 $f'(x) = x(x+2)(x-4)$   | А -2    |
| 2 $f'(x) = x^2(x+2)(x-4)$ | Б 4     |
| 3 $f'(x) = x(x+2)(4-x)$   | В -2; 4 |
| 4 $f'(x) = x^2(x+2)(4-x)$ | Г -4    |
|                           | Д 0     |

25.33. Установити відповідність між похідними  $f'(x)$  функцій (1–4) та точками мінімуму функцій  $f(x)$  (А–Д).

- |                               |         |
|-------------------------------|---------|
| 1 $f'(x) = (x+3)(x-1)(x-5)$   | А 5     |
| 2 $f'(x) = (x+3)(x-1)^2(x-5)$ | Б 1     |
| 3 $f'(x) = (x+3)(x-1)(5-x)$   | В -3    |
| 4 $f'(x) = (x+3)(x-1)^2(5-x)$ | Г -1    |
|                               | Д -3; 5 |

25.34. Установити відповідність між функціями (1–4) та точками максимуму цих функцій (А–Д).

- |  |         |
|--|---------|
| 1 $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ | А 0     |
| 2 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$  | Б 1     |
| 3 $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$  | В -1    |
| 4 $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$ | Г -1; 0 |
|  | Д -1; 1 |

25.35. Установити відповідність між функціями (1–4) та точками мінімуму цих функцій (А–Д).

- |   |         |
|---|---------|
| 1 $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$            | А 0     |
| 2 $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2$           | Б 2     |
| 3 $y = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$  | В -2; 2 |
| 4 $y = -\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3}$ | Г -2; 0 |
|   | Д -2    |

**Розв'яжіть завдання 25.36–25.45. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

**25.36.** Знайти проміжки спадання функції  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5$ . У відповідь записати додатну абсцису середини одного з проміжків спадання.

**25.37.** Знайти проміжки спадання функції  $y = \frac{3x + x^2}{x - 1}$ . У відповідь записати додатну абсцису середини одного з проміжків спадання.

**25.38.** Знайти найбільше значення функції  $y = -2x^3 + 6x^2 + 9$  на відрізку  $[0; 3]$ .

**25.39.** Число 64 подати у вигляді добутку двох додатних множників так, щоб сума їхніх квадратів була найменшою. У відповідь записати найменшу суму квадратів знайдених множників.

**25.40.** Прямокутну ділянку землі, яка прилягає до стіни будинку, потрібно обгородити парканом завдовжки 160 метрів. Знайти довжину прямокутника в метрах, за якої площа ділянки буде найбільшою.

**25.41.** Визначити висоту в метрах відкритого басейну із квадратним дном, об'єм якого дорівнює  $32 \text{ м}^3$ , такого, щоб на облицювання його стін і дна витрати на матеріал, були найменшими.

**25.42.** За якого найменшого цілого значення  $a$  функція  $y = x^3 + 3x^2 + ax - 1$  не має критичних точок?

**25.43.** За якого від'ємного значення  $b$  один із екстремумів функції  $y = 2x^3 - 3x^2 + b$  дорівнює  $-1$ ?

**25.44.** За якого найбільшого значення  $a$  функція  $y = xe^x$  є спадною на проміжку  $[a - 5; a + 3]$ ?

**25.45.** Знайти, за яких значень параметра  $a$  сума кубів коренів рівняння  $6x^2 + 6(a - 1)x - 5a + 2a^2 = 0$  буде найбільшою.

## ТЕМА 26. ПЕРВІСНА. ІНТЕГРАЛ

Функцію  $F(x)$  називають *первісною* для функції  $f(x)$  на проміжку  $X$ , якщо для довільного  $x$  з цього проміжку справедлива рівність  $F'(x) = f(x)$ . **Основна властивість первісної:** якщо  $F(x)$  — первісна для функції  $f(x)$  на проміжку  $X$ , то функція  $f(x)$  має безліч первісних, і всіх їх можна задати формулою  $F(x) + C$ , де  $C$  — довільне число. Наприклад, первісною для функції  $f(x) = 4x^3$ , є функція  $F(x) = x^4$ , оскільки  $(x^4)' = 4x^3$ . Первісними для даної функції є також функції  $F(x) = x^4 + 6$ ,  $F(x) = x^4 + 50,1$ ,  $F(x) = x^4 - 1$  і взагалі,  $F(x) = x^4 + C$ , де  $C$  — довільне число.

Сукупність усіх первісних для функції  $f(x)$  на проміжку  $X$  називають *невизначеним інтегралом* функції на цьому проміжку і позначають  $\int f(x)dx = F(x) + C$ . Наприклад,  $\int \cos x dx = \sin x + C$ .

### Властивості невизначеного інтеграла.

- $\int F'(x)dx = F(x) + C$ .
- $(\int f(x)dx)' = f(x)$ .
- $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$ .
- $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$  (сталій множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла).

### Таблиця інтегралів.

- $\int dx = x + C$ ;
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ;
- $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ;
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ;
- $\int e^x dx = e^x + C$ ;
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ;
- $\int \cos x dx = \sin x + C$ ;
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ ;
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$ .

**Приклад 1.** Знайти невизначені інтеграли: а)  $\int (4x^3 - 6) dx$ ; б)  $\int \left( 3 \cos x + \frac{10}{x} \right) dx$ .

■ а)  $\int (4x^3 - 6) dx = 4 \int x^3 dx - 6 \int dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 6 \cdot x + C = x^4 - 6x + C$ .

б)  $\int \left( 3 \cos x + \frac{10}{x} \right) dx = 3 \int \cos x dx + 10 \int \frac{dx}{x} = 3 \sin x + 10 \ln|x| + C$ . ■



**Формула Ньютона — Лейбніца:**  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ , де  $\int_a^b f(x)dx$  — визначений інтеграл від  $a$  до  $b$  функції  $f(x)$ ,  $F(x)$  — первісна для функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[a; b]$ .

**Приклад 2.** Обчислити визначений інтеграл  $\int_1^5 (2x+6)dx$ .

$$\blacksquare \int_1^5 (2x+6)dx = (x^2 + 6x) \Big|_1^5 = 5^2 + 6 \cdot 5 - (1^2 + 6 \cdot 1) = 48. \blacksquare$$

**Площа криволінійної трапеції:**  $S = \int_a^b f(x)dx$ , якщо  $f(x) \geq 0$  на відрізку  $[a; b]$  (рис. 1).

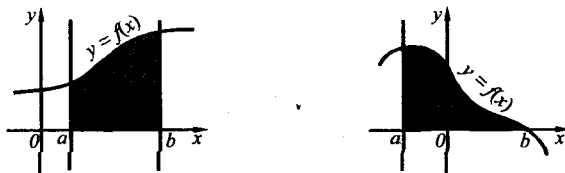


Рис. 1

**Об'єм тіла обертання** обчислюють за формулою:  $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$  (рис. 2).

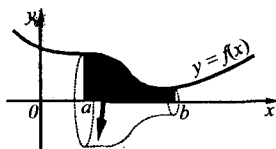


Рис. 2

**Приклад 3.** Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

а)  $y = x^2 - 4x - 1, y = 0, x = 0, x = 3$ ;

б)  $y = x^2 - 2x, g = x + 4$ .

■ а) Фігура, обмежена заданими лініями, є криволінійною трапецією (рис. 3). Функція  $y = x^2 - 4x - 1$  на відрізку  $[0; 3]$  набуває від'ємних значень, тому площа фігури дорівнює модулю відповідного визначеного інтеграла:

$$S = \left| \int_0^3 (x^2 - 4x - 1) dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - 2x^2 - x \right|_0^3 = |9 - 18 - 3 - 0| = 12.$$

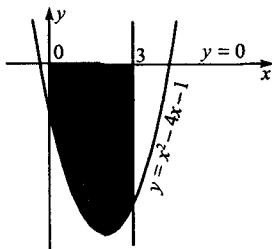


Рис. 3

б) Розв'язавши рівняння  $x^2 - 2x = x + 4$ ;  $x^2 - 3x - 4 = 0$ ;  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = -1$ , знаходимо абсциси точок перетину графіків даних функцій (межі інтегрування): 4 і -1. Отже,  $a = -1$ ,  $b = 4$ . На відрізку  $[-1; 4]$   $g(x) \geq y(x)$  (див. рис. 4). Тому площа фігури, обмеженої графіками даних функцій дорівнює:

$$S = \int_a^b (g(x) - y(x)) dx = \int_{-1}^4 (x + 4 - (x^2 - 2x)) dx = \int_{-1}^4 (-x^2 + 3x + 4) dx = \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right) \Big|_{-1}^4 = 20 \frac{5}{6}.$$

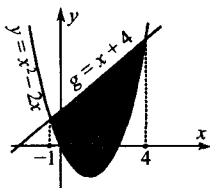


Рис. 4 ■

**Приклад 4.** Яка з функцій є первісною для функції  $f(x) = 4x^3 + 6x$ ?

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = 12x^2 - 6$	$F(x) = 2x(2x^2 - 3)$	$F(x) = x^4 + 3x^2 - 7$	$F(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + C$	$F(x) = 12x^4 - 6x^2 + C$

■  $\int (4x^3 + 6x) dx = \int 4x^3 dx + \int 6x dx = x^4 + 3x^2 + C$ . Якщо  $C = -7$ , то  $F(x) = x^4 + 3x^2 - 7$ .

Відповідь. В. ■

**Завдання 26.1–26.23** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**26.1.** Знайти загальний вигляд первісних для функції  $f(x) = x^{10} - x^8 + x + 13$ .

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = 10x^9 - 8x^7 + 1 + C$	$F(x) = \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^2}{2} + 13x + C$	$F(x) = \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^2}{2} + 13 + C$	$F(x) = 11x^{11} - 9x^9 + 2x^2 + 13x + C$	$F(x) = -\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^2}{2} - 13x + C$

**26.2.** Знайти загальний вигляд первісних для функції  $f(x) = -4\cos x$ .

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = -4\sin x + C$	$F(x) = 4\sin x + C$	$F(x) = -4\cos x + C$	$F(x) = 4\cos x + C$	$F(x) = -16\cos x + C$

**26.3.** Яка з функцій задовольняє рівняння  $f'(x) = \frac{10}{\sin^2 x}$ ?

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 10\operatorname{tg} x$	$f(x) = -10\operatorname{ctg} x$	$f(x) = -10\operatorname{tg} x$	$f(x) = -\frac{1}{10}\operatorname{ctg} x$	$f(x) = 10\operatorname{ctg} x$

26.4. Для функції  $f(x) = \sin x$  знайти первісну  $F(x)$ , графік якої проходить через точку  $O(0; 0)$ .

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = \sin x$	$F(x) = \cos x$	$F(x) = \cos x + 1$	$F(x) = 1 - \cos x$	$F(x) = \cos x - 1$

26.5. Обчислити інтеграл  $\int_0^1 x^{20} dx$ .

А	Б	В	Г	Д
19	21	20	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{21}$

26.6. Обчислити  $\int_0^1 (x^2 - 4x) dx$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	$-\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$

26.7. Обчислити  $\int_0^1 2x^5 dx$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{4}$

26.8.  $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$2 \cos x \Big _0^{\pi}$	$-\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \Big _0^{\pi}$	$\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \Big _0^{\pi}$	$-2 \cos \frac{x}{2} \Big _0^{\pi}$	$2 \cos \frac{x}{2} \Big _0^{\pi}$

26.9. Обчислити:  $80(\sqrt{3} + 1) \int_{\frac{\pi}{20}}^{\frac{\pi}{10}} \sin \left( 10x + \frac{\pi}{3} \right) dx$ .

А	Б	В	Г	Д
0,8	$\frac{1-\sqrt{3}}{20}$	-0,8	8	-8

26.10. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю  $v(t) = 2t + 1$ . Знайти закон руху тіла  $S(t)$ , якщо  $S(1) = 3$ .

А	Б	В	Г	Д
$S(t) = t^2 + t + 3$	$S(t) = t^2 + t$	$S(t) = t^2 + t + 1$	$S(t) = t^2 + t + 2$	$S(t) = t^2 + t - 1$

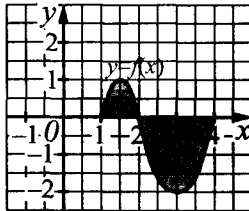
26.11. Вказати інтеграл для обчислення площі фігури, обмеженої лініями  $y = x^2$ ,  $y = 0$  і  $x = 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$\int_0^4 x^2 dx$	$\int_0^2 (x^2 - x) dx$	$\int_0^2 2x dx$	$\int_0^2 \frac{x^3}{3} dx$	$\int_0^2 x^2 dx$

26.12. Вказати формулу для обчислення площі  $S$  фігури, обмеженої лініями  $y = x^2$  і  $y = x$ .

А	Б	В	Г	Д
$S = \int_0^1 (x^2 - x) dx$	$S = \int_0^1 (x^2 + x) dx$	$S = \int_0^1 (x - x^2) dx$	$S = \int_0^1 x^2 dx$	$S = \int_0^1 x dx$

26.13. Вказати формулу для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$S = \int_1^4 f(x) dx$	$S = 2 \int_1^4 f(x) dx$	$S = \int_1^2 f(x) dx - \int_2^4  f(x)  dx$	$S = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx$	$S = \int_1^2 f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx$

26.14. Знайти загальний вигляд первісних для функції  $f(x) = \cos^2 x$ .

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = -\sin^2 x + C$	$F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$	$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$	$F(x) = \frac{x}{2} + \sin 2x + C$	$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + C$

26.15. Обчислити інтеграл  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$ .

А	Б	В	Г	Д
3	1,5	6	2	0,75

26.16. Використовуючи геометричний зміст інтеграла, обчислити  $\int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2} dx$ .

А	Б	В	Г	Д
8	16	$8\pi$	$16\pi$	$32\pi$

26.17. Вказати формулу для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, утвореної лініями  $y = \sqrt{\cos x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -\frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ .

А	Б	В	Г	Д
$V = \pi \sin x \left  \begin{matrix} \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \end{matrix} \right.$	$V = \pi \cos x \left  \begin{matrix} \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \end{matrix} \right.$	$V = \frac{\pi}{2\sqrt{\cos x}} \left  \begin{matrix} \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \end{matrix} \right.$	$V = \pi\sqrt{\cos x} \left  \begin{matrix} \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \end{matrix} \right.$	$V = \pi\sqrt{\sin x} \left  \begin{matrix} \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \end{matrix} \right.$

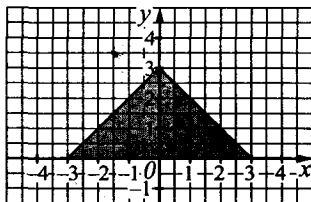
26.18. Вказати первісну функцію для функції  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ .

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = \operatorname{ctg}^2 x + C$	$F(x) = \operatorname{tg} x - x$	$F(x) = \operatorname{ctg} x - x$	$F(x) = \operatorname{ctg} x + x$	$F(x) = \operatorname{tg} x + x$

26.19. Вказати формулу для обчислення площі фігури, обмеженої частинами параболи  $y = x^2 - 4$  й осі абсцис.

А	Б	В	Г	Д
$S = \int_{-4}^4 (x^2 - 4) dx$	$S = \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx$	$S = -\int_{-2}^2 \left( \frac{x^3}{3} - 4x \right) dx$	$S = -\int_{-4}^4 (x^2 - 4) dx$	$S = -\int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx$

26.20. Вказати формулу для обчислення площі трикутника, заштрихованого на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$S = \int_{-3}^3 ( x  - 3) dx$	$S = \int_{-3}^3 ( x  + 3) dx$	$S = \int_{-3}^3 (3 -  x ) dx$	$S = \int_{-3}^3  3 - x  dx$	$S = \int_{-3}^3  x + 3  dx$

26.21. Серед наведених інтегралів вказати той, значення якого найменше.

А	Б	В	Г	Д
$\int_0^1 dx$	$\int_0^1 x dx$	$\int_0^1 x^2 dx$	$\int_0^1 x^3 dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

26.22. Обчислити інтеграл  $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx$ .

А	Б	В	Г	Д
$-4\pi$	$4\pi$	$-2\pi$	$2\pi$	$0$

26.23. Яка з наведених функцій є первісною для функції  $y = 2|x|$ ?

А	Б	В	Г	Д
$y = x^2$	$y =  x^2 $	$y = -x^2$	$y = x x $	$y = -x x $

Завдання 26.24–26.32 передбачають установалення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

26.24. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їхніми числовими значеннями (А–Д).

1  $\int_0^1 2x^3 dx$

А  $\frac{1}{2}$

2  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x dx$

Б  $\frac{1}{4}$

3  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2 \cos x dx$

В 2

Г  $1\frac{1}{2}$

4  $\int_0^1 (x+1) dx$

Д 1

26.25. Установити відповідність між функціями  $f(x)$  (1–4) та їх первісними  $F(x)$  (А–Д).

1  $f(x) = x^3$

А  $F(x) = 3x^2 + C$

2  $f(x) = \frac{1}{x^3}$

Б  $F(x) = 6 \ln x + C$

3  $f(x) = 6x$

В  $F(x) = \frac{6}{x^2} + C$

4  $f(x) = \frac{6}{x}$

Г  $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$

Д  $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + C$

26.26. Установити відповідність між функціями  $f(x)$  (1–4) та їх первісними  $F(x)$  (А–Д).

1  $f(x) = \cos \frac{x}{4} + \sin 4x$

А  $F(x) = \sin \frac{x}{4} - \cos 4x + C$

2  $f(x) = \cos 4x + \sin \frac{x}{4}$

Б  $F(x) = \sin 4x - \cos \frac{x}{4} + C$

3  $f(x) = \frac{1}{4} \cos \frac{x}{4} + 4 \sin 4x$

В  $F(x) = 16 \sin 4x - \frac{1}{16} \cos \frac{x}{4} + C$

4  $f(x) = 4 \cos 4x + \frac{1}{4} \sin \frac{x}{4}$

Г  $F(x) = 4 \sin \frac{x}{4} - 4 \cos \frac{x}{4} + C$

Д  $F(x) = 4 \sin \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \cos 4x + C$

26.27. Установити відповідність між функціями (1–4), заданими на відрізку  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , та їх первісними (А–Д) на цьому відрізку.

1  $f(x) = \operatorname{tg} x$

А  $F(x) = \ln \operatorname{tg} x + C$

2  $f(x) = \operatorname{ctg} x$

Б  $F(x) = \ln \operatorname{ctg} x + C$

3  $f(x) = \frac{2}{\sin 2x}$

В  $F(x) = \ln \sin x + C$

Г  $F(x) = -\ln \sin x + C$

4  $f(x) = -\frac{2}{\sin 2x}$

Д  $F(x) = -\ln \cos x + C$

26.28. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх розв'язками (А–Д) — функціями, які задовольняють рівняння.

1  $f'(x) = \frac{4}{\cos^2 4x}$

А  $f(x) = \frac{4}{\sin^2 4x} + C$

2  $f'(x) = \frac{16}{\cos^2 4x}$

Б  $f(x) = \frac{4}{\cos^2 4x} + C$

3  $f'(x) = -\frac{32 \cos 4x}{\sin^3 4x}$

В  $f(x) = 4 \operatorname{tg} 4x + C$

Г  $f(x) = -\operatorname{ctg} 4x + C$

4  $f'(x) = \frac{4}{\sin^2 4x}$

Д  $f(x) = \operatorname{tg} 4x + C$

26.29. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1  $\int_0^1 x^3 dx$

А  $\frac{1}{10}$

2  $\int_0^1 x^2 dx$

Б  $\frac{1}{5}$

3  $\int_0^1 x dx$

В  $\frac{1}{4}$

4  $\int_0^1 \frac{x dx}{5}$

Г  $\frac{1}{3}$

Д  $\frac{1}{2}$

26.30. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |   |  |   |                             |
|---|--|---|-----------------------------|
| 1 | $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}} dx$              | А | $\frac{e}{4} - \frac{1}{4}$ |
| 2 | $\int_0^2 \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} dx$    | Б | $\frac{e}{2} - \frac{1}{2}$ |
| 3 | $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx$           | В | $e - 1$                     |
| 4 | $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{2} dx$ | Г | $2e - 2$                    |
|   |  | Д | $4e - 4$                    |

26.31. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |   |  |   |    |
|---|--|---|----|
| 1 | $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$ | А | -2 |
| 2 | $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$              | Б | -1 |
| 3 | $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx$     | В | 0  |
| 4 | $\int_{-\pi}^0 \sin x dx$              | Г | 1  |
|   |  | Д | 2  |

26.32. Установити відповідність між лініями, заданими рівняннями (1–4), та об'ємами тіл (А–Д), утвореними в результаті обертання цих ліній навколо осі  $x$ .

- |   |   |   |               |
|---|---|---|---------------|
| 1 | $y = \sqrt{x}$ , де $x \in [-2; 2]$   | А | $0,5\pi$      |
| 2 | $y = \sqrt{\sin x}$ , де $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$                | Б | $\pi$         |
| 3 | $y = \frac{1}{\cos x}$ , де $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$             | В | $1,5\pi$      |
| 4 | $y = \frac{1}{\sin x}$ , де $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ | Г | $\sqrt{3}\pi$ |
|   |   | Д | $4\pi$        |

Розв'яжіть завдання 26.33–26.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

26.33. Точка рухається прямолінійно з прискоренням  $a(t) = 12t^2 + 4$ . Знайти закон руху  $S(t)$  точки, якщо в момент часу  $t = 1$  с її швидкість дорівнювала 10 м/с, а  $S(1) = 12$  м. У відповідь записати  $S(3)$ .



26.34. Обчислити інтеграл  $12 \int_2^3 \frac{1-x^4}{1-x} dx$ .

26.35. Обчислити інтеграл  $3 \int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$ .

26.36. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $y = 8x - 6x^2$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

26.37. Обчислити площу фігури, обмежену лініями  $y = 6 - 2x$ ,  $y = 6 + x - x^2$ .

26.38. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмежену лініями  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ .

26.39. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції  $f(x) = 8 - 0,5x^2$ , дотичною до нього в точці  $x = -2$  і прямою  $x = 1$ .

26.40. Знайти об'єм  $V$  тіла обертання, утвореного при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями  $y = \sqrt{x}$  і  $y = x$ . У відповідь записати  $\frac{3V}{\pi}$ .

26.41. Знайти найменше значення інтеграла  $\int_0^a \cos \frac{x}{2} dx$ ,  $a \in R$ .

26.42. Знайти меншу з площ кожної з фігур, на які пряма  $y = x + 4$  ділить фігуру, обмежену лініями  $y = \frac{1}{2}x^2$  і  $y = 8$ .

## ТЕМА 27. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Добуток  $n$  перших натуральних чисел називають  $n$ -факторіалом:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0; 1, \\ n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1, & n > 1. \end{cases}$$

Наприклад,  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  (читають: «П'ять факторіал дорівнює сто двадцять»).

**Перестановкою** з  $n$  елементів ( $P_n$ ) називають упорядковану  $n$ -елементну множину. Кількість всеможливих перестановок з  $n$  елементів обчислюють за формулою:

$$P_n = n!.$$

**Розміщенням** з  $n$  елементів по  $k$  ( $A_n^k$ ) називають впорядковану  $k$ -елементну підмножину  $n$ -елементної множини ( $k \leq n$ ,  $k > 0$ ). Кількість всеможливих розміщень з  $n$  елементів по  $k$  обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

**Комбінацією** з  $n$  елементів по  $k$  ( $C_n^k$ ) називають  $k$ -елементну підмножину  $n$ -елементної множини ( $k \leq n$ ). Кількість усеможливих комбінацій з  $n$  елементів по  $k$  обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

**Приклад 1.** Множина  $M$  складається з трьох елементів:  $\{\blacksquare; \blacktriangle; \bullet\}$ . Знайти  $P_3$ ;  $A_3^2$ ;  $C_3^2$ .

■ Усеможливих перестановок цієї множини існує  $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ :

$\{\blacksquare, \blacktriangle, \bullet\}$ ,  $\{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}$ ,  $\{\blacktriangle, \blacksquare, \bullet\}$ ,  $\{\blacktriangle, \bullet, \blacksquare\}$ ,  $\{\bullet, \blacksquare, \blacktriangle\}$ ,  $\{\bullet, \blacktriangle, \blacksquare\}$ .

Розміщень з множини  $M$  по два елементи існує  $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$ :

$\{\blacksquare, \blacktriangle\}$ ,  $\{\blacktriangle, \blacksquare\}$ ,  $\{\blacksquare, \bullet\}$ ,  $\{\bullet, \blacksquare\}$ ,  $\{\blacktriangle, \bullet\}$ ,  $\{\bullet, \blacktriangle\}$ .

(Розміщення  $\{\blacksquare, \blacktriangle\}$  та  $\{\blacktriangle, \blacksquare\}$  різні, бо в них різний порядок розташування елементів).

Комбінацій з множини  $M$  по два елементи існує  $C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$ :

$\{\blacksquare, \blacktriangle\}$ ,  $\{\blacksquare, \bullet\}$ ,  $\{\blacktriangle, \bullet\}$ .

(Комбінації  $\{\blacksquare, \blacktriangle\}$  та  $\{\blacktriangle, \blacksquare\}$  однакові, бо в комбінаціях порядок розташування елементів не має значення). ■

**Приклад 2.** Скільки п'ятизначних чисел, не кратних п'яти, можна скласти з цифр 3, 4, 5, 6, 7 без повторень цифр у кожному з них?

А	Б	В	Г	Д
96	156	120	5	24

■ Усіх таких чисел, разом з кратними 5, є  $P_5$ ;  $P_5 = 5!$ . Для чисел, кратних 5, цифра 5 є останньою цифрою. Таких чисел є  $P_4 = 4!$ . Отже, шуканих чисел є  $5! - 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (5 - 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 96$ .

Відповідь. В. ■

**Приклад 3.** З 8 чоловіків і 6 жінок потрібно утворити таку комісію, щоб до її складу входило 2 чоловіки і 3 жінки. Скількома способами це можна зробити?

■  $C_8^2$  — кількість способів утворення чоловічої частини комісії;  $C_6^3$  — кількість способів утворення жіночої частини комісії. До кожної однієї чоловічої частини комісії можна додавати кожну з  $C_6^3$  жіночих частин комісії. Тому всіх випадків буде

$$C_8^2 : C_6^3 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 560 \text{ — способів утворення комісії.}$$

Відповідь. 560 способами. ■

**Приклад 4.** У стандартному розкладі бінома  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{14}$ . Знайти коефіцієнт біля  $x^2$ .

А	Б	В	Г	Д
2162160	4557	6	2	3003

■ Запишемо загальний вигляд члена  $T_{k+1}$  розкладу бінома  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{14}$ :  $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ . У

нашому випадку  $n = 14$ ;  $a = x^{\frac{1}{2}}$ ;  $b = x^{-\frac{1}{3}}$ . Тоді:  $T_{k+1} = C_{14}^k \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{14-k} \cdot \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^k = C_{14}^k \cdot x^{7-\frac{1}{2}k} \cdot x^{-\frac{1}{3}k} = C_{14}^k \cdot x^{7-\frac{5}{6}k}$ . За умовою,  $x^{7-\frac{5}{6}k} = x^2$ . Звідки  $7 - \frac{5}{6}k = 2$ ;  $k = 6$ . Тоді одержимо:

$$C_{14}^6 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 3003.$$

Відповідь. Д. ■

Завдання 27.1–27.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

27.1. Є 5 різних олівців і 7 різних ручок. Скількома різними способами можна утворити набір з однієї ручки й одного олівця?

А	Б	В	Г	Д
$7! + 5!$	$5^7$	$7^5$	$5 \cdot 7$	$7 + 5$

27.2. У їдальні є 3 перші страви, 5 других і 2 треті страви. Скількома способами можна скласти з них обід?

А	Б	В	Г	Д
17	10	30	15	11

27.3. Скількома способами можна скласти список з 8 учнів?

А	Б	В	Г	Д
$8^2$	$8^8$	8	$1 + 2 + 3 + \dots + 8$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8$

27.4. Скількома способами можна з 30 учнів вибрати трьох чергових?

А	Б	В	Г	Д
$P_{30}$	$30 \cdot 3$	$30 + 29 + 28$	$A_{30}^3$	$C_{30}^3$

27.5. Із класу, в якому навчається 18 учнів, вибирають трьох делегатів на шкільну конференцію. Скількома способами це можна зробити?

А	Б	В	Г	Д
4896	2448	816	1224	1632

27.6. Скількома способами можна розсадити 6 учнів за круглим столом?

А	Б	В	Г	Д
720	36	120	5040	60

27.7. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 3, 5, 7 і 9, якщо цифри в числі не повторюються?

А	Б	В	Г	Д
$A_5^4$	$C_5^4$	$P_5$	$P_4$	$4^5$

27.8. Скільки існує звичайних правильних дробів, у яких чисельники і знаменники прості числа — 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 і 23?

А	Б	В	Г	Д
19	18	144	72	36

27.9. Скількома способами групу із 15 осіб можна розділити на дві групи так, щоб в одній було 11 осіб, а в іншій — 4?

А	Б	В	Г	Д
$C_{15}^4$	$A_{15}^{11}$	$A_{11}^4$	$A_{15}^{11} - P_4$	$C_{15}^{11} \cdot C_{15}^4$

27.10. Скільки існує різних телефонних номерів, які містять п'ять цифр?

А	Б	В	Г	Д
5!	1 + 2 + 3 + 4 + 5	5 <sup>5</sup>	9 <sup>5</sup>	10 <sup>5</sup>

27.11. Скільки існує різних телефонних номерів, які містять сім цифр і не починаються з нуля?

А	Б	В	Г	Д
9!	9 <sup>7</sup>	10 <sup>7</sup>	9 · 10 <sup>6</sup>	10!

27.12. Скільки є чисел, кратних числу 5, серед п'ятицифрових чисел, складених з цифр 1, 3, 5, 7 і 9 без повторення?

А	Б	В	Г	Д
3!	$A_5^4$	$C_5^4$	5!	4!

27.13. Скільки існує точок у координатному просторі, координати яких є цілими одноцифровими додатними числами?

А	Б	В	Г	Д
3 <sup>10</sup>	3 <sup>9</sup>	9 <sup>3</sup>	10 <sup>3</sup>	$A_9^3$

27.14. Скільки існує шестицифрових чисел, усі цифри в яких непарні?

А	Б	В	Г	Д
5 <sup>6</sup>	6 <sup>5</sup>	5!	6!	$A_6^5$

27.15. Скільки чотирицифрових чисел, кратних 5, у яких усі цифри різні, можна записати, використовуючи цифри 5, 6, 7, 8 і 9?

А	Б	В	Г	Д
120	60	6	24	720

27.16. З п'яти різних томів прози і шести різних томів віршів потрібно вибрати 2 томи прози і 4 томи віршів. Скількома способами можна це зробити?

А	Б	В	Г	Д
$A_4^6$	$A_5^2 \cdot C_6^4$	$C_5^2 \cdot C_6^4$	$A_5^2 \cdot A_6^4$	$C_5^2 + C_6^4$

27.17. Збори з 20 осіб обирають голову, секретаря і трьох членів редакційної комісії. Скількома способами можна це зробити?

А	Б	В	Г	Д
$C_{20}^2 \cdot C_{18}^3$	$A_{20}^2 \cdot C_{18}^3$	$A_{20}^2 \cdot A_{18}^3$	$A_{20}^2 + A_{18}^3$	$A_{20}^2 + A_{18}^3$

27.18. Автомобільний номер складається з двох букв (усього використовують 30 букв) і чотирьох цифр (використовують усі 10 цифр). Скільки існує таких номерів?

А	Б	В	Г	Д
$30^2 \cdot 4^{10}$	$2^{30} \cdot 10^4$	$2^{30} \cdot 4^{10}$	$30^4 \cdot 10^2$	$30^2 \cdot 10^4$

27.19. У шкільному розкладі на понеділок є шість різних уроків, серед них є алгебра та геометрія. Скількома способами можна скласти розклад уроків на цей день, щоб уроки математики були поруч?

А	Б	В	Г	Д
$C_6^2$	$P_5$	$P_6$	$P_5 \cdot P_2$	$A_6^2$

27.20. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4 і 5 без повторення, щоб парні цифри не були поруч?

А	Б	В	Г	Д
$P_5$	$P_4 \cdot P_2$	$P_5 - P_4 \cdot P_2$	$P_4 - P_3 \cdot P_2$	$P_3 \cdot P_2$

27.21. Скількома способами 5 хлопчиків і 5 дівчаток можуть зайняти в театрі в одному ряді місця з 1 по 10 так, щоб хлопчики сиділи на непарних місцях, а дівчатка — на парних?

А	Б	В	Г	Д
$5! \cdot 5!$	$10!$	$5!$	$10! \cdot 5!$	$5! + 5!$

27.22. Поїзд, у якому їдуть 300 пасажирів, робить  $k$  зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажери на цих зупинках?

А	Б	В	Г	Д
$300k$	$300^k$	$k^{300}$	$300 + k$	$300k!$

27.23. У ліфт 12-поверхового будинку зайшло на першому поверсі 10 осіб. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?

А	Б	В	Г	Д
$12^{11}$	$10^{11}$	$10^{12}$	$12^{10}$	$11^{10}$

27.24. У стандартному вигляді розкладу бінома  $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$  вказати коефіцієнт біля  $x$ .

А	Б	В	Г	Д
40	80	20	240	160

Завдання 27.25–27.33 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

27.25. Установити відповідність між задачами (1–4) та відповідями до них (А–Д).

- |   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| 1 | Скількома способами можна вибрати двох чергових із шести учнів класу?  | А | $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}$               |
| 2 | Скількома способами можна вибрати із 6 учнів класу голову зборів і секретаря?  | Б | $6 \cdot 5$                                 |
| 3 | Скількома способами можна вишикувати в ряд 6 учнів класу?  | В | $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$                     |
| 4 | Із коробки з шістьма різнокольоровими олівцями навмання беруть один олівець, малюють ним і ставлять на місце, потім знову навмання беруть один олівець, малюють ним і ставлять на місце. Скільки різних розмальовок може утворитись? | Г | $6^2$                                       |
|   |  | Д | $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ |

27.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

- |   |                    |   |    |
|---|--------------------|---|----|
| 1 | $\frac{10!}{8!}$   | А | 30 |
| 2 | $\frac{5!}{2}$     | Б | 40 |
| 3 | $4 \cdot 4! - 4^2$ | В | 60 |
| 4 | $3! + 4!$          | Г | 80 |
|   |                    | Д | 90 |

27.27. Установити відповідність між позначеннями кількостей сполук (1–4) та виразами, за якими їх обчислюють (А–Д).

- |   |                   |   |                       |
|---|-------------------|---|-----------------------|
| 1 | $A_n^k$           | А | $\frac{n!}{(n-k)!}$   |
| 2 | $C_n^k$           | Б | $k! \cdot n!$         |
| 3 | $\frac{P_k}{P_n}$ | В | $\frac{n!}{k!}$       |
| 4 | $A_n^{n-k}$       | Г | $\frac{k!}{n!}$       |
|   |                   | Д | $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ |

27.28. Установити відповідність між заданими позначеннями кількостей сполук (1–4) та їх числовими значеннями (А–Д).

1 $C_5^2$	А 36
2 $A_5^2$	Б 30
3 $C_{30}^{29}$	В 24
4 $P_4$	Г 20
	Д 10

27.29. Установити відповідність між записами (1–4) та їх доповненнями (А–Д) до правильних тверджень.

1 Якщо є 5 видів конвертів без марок та 4 види марок, то вибір конверта та марки можна здійснити ... способами.	А 9
	Б 18
	В 20
2 Якщо на тарілці є 6 різних груш і 3 різних яблука, то вибір одного фрукту можна здійснити ... способами.	Г 25
	Д 72
3 Якщо на полиці є 12 різних підручників з алгебри, 6 різних підручників з геометрії та 7 різних підручників з фізики, то вибір одного підручника з математики можна здійснити ... способами.	
4 Якщо на вершину гори веде 5 доріг, то вийти на гору й опуститися з неї можна ... способами.	

27.30. Установити відповідність між записами (1–4) та їх доповненнями (А–Д) до правильних тверджень.

1 Множину $\{a, b, c\}$ можна впорядкувати ... способами.	А 5
	Б 6
2 Із множини $\{a, b, c, d\}$ можна утворити ... упорядкованих пар елементів.	В 10
	Г 12
3 Із множини $\{a, b, c, d, e\}$ можна утворити ... чотириелементних множин.	Д 15
4 Із множини $\{a, b, c, d, e, f\}$ можна утворити ... невпорядкованих пар елементів.	

27.31. Установити відповідність між множинами (1–4), заданими характеристичними властивостями, та кількістю елементів у цих множинах (А–Д).

1 Множина трицифрових чисел, у яких усі цифри різні.	А 96
2 Множина трицифрових чисел, які утворені з цифр 1, 2, 3, ..., 8, 9 і в яких усі цифри різні.	Б 120
	В 504
3 Множина чотирицифрових чисел, у яких усі цифри різні й які утворені з непарних цифр.	Г 576
	Д 648
4 Множина чотирицифрових чисел, які утворені з парних цифр і в яких усі цифри різні.	



27.32. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

- |                     |      |
|---------------------|------|
| 1 $A_{x+2}^2 = 110$ | А 12 |
| 2 $C_{x-1}^2 = 55$  | Б 11 |
| 3 $C_{x+2}^2 = 45$  | В 10 |
| 4 $A_{x-1}^2 = 72$  | Г 9  |
|                     | Д 8  |

27.33. Установити відповідність між виборами об'єктів (1–4) та записами (А–Д) кількості можливих способів їх виконання.

- |  |                          |
|--|--------------------------|
| 1 З 10 осіб вибирають голову, секретаря і 4 членів комісії.  | А $A_{10}^2 + A_8^4$     |
| 2 Для формування посилки необхідно вибрати два підручники з алгебри з 10 різних або 4 підручники з геометрії з 8 різних. | Б $C_{10}^2 + C_8^2$     |
| 3 Для складання коду необхідно вибрати з 10 літер дві різні або з 8 цифр чотири різні.                                   | В $C_{10}^2 + C_8^4$     |
| 4 Для складання номера автомобіля необхідно вибрати з 10 літер дві різні з 8 цифр чотири різні.                          | Г $A_{10}^2 \cdot A_8^4$ |
|  | Д $A_{10}^2 \cdot C_8^4$ |

Розв'яжіть завдання 27.34–27.46. Відповідь запишіть десятковим дробом.

27.34. Обчислити  $15 \cdot \frac{6!}{A_{10}^7} (C_7^5 + C_7^3)$ .

27.35. Розв'язати рівняння  $C_{x-3}^2 = 21$ .

27.36. Знайти коефіцієнт четвертого члена розкладу степеня двочлена  $(x^2 - y)^6$ .

27.37. Знайти коефіцієнт п'ятого члена розкладу степеня двочлена  $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^9$ .

27.38. Скільки всього існує трицифрових чисел, у яких усі цифри різні й непарні?

27.39. Скільки трицифрових чисел, кратних 3, можна записати, використовуючи лише цифри 1, 2, 3, 4, 5 і 6, якщо в цих числах цифри можуть повторюватися?

27.40. Із цифр 1, 2, 3, 4 і 5 складають різні п'ятицифрові числа, які не містять однакових цифр. Скільки серед цих чисел є таких, які не починаються з числа 45?

27.41. У чемпіонаті області з футболу грає 7 команд. Скількома способами можуть розподілитися місця в турнірній таблиці, якщо відомо, що команди «Нива» і «Вимпел» посядуть перші два місця?

27.42. В одного учня 6 різних книжок з математики, а в іншого — 7. Скількома способами можна обміняти 3 книжки першого учня на 3 книжки другого учня?

27.43. Знайти член розкладу степеня двочлена  $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$ , який не залежить від  $x$ .

- 27.44.** Скількома способами можна розташувати на полиці 3 чорні, 2 сині і 3 червоні кулі?
- 27.45.** З 10 різних троянд і 8 різних жоржин потрібно скласти букет, у якому повинно бути не менше 8 троянд і 7 жоржин. Скількома способами це можна зробити?
- 27.46.** Серед членів шахового гуртка 2 дівчинки і 7 хлопчиків. Для участі в змаганнях необхідно скласти команду з чотирьох осіб, у яку обов'язково повинна увійти хоча б одна дівчина. Скількома способами можна це зробити?

## ТЕМА 28. ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ

**Ймовірністю** події  $A$  називають відношення кількості  $k$  випробувань, які сприяють настанню події  $A$ , до кількості  $n$  усіх рівно можливих у даному досліді випробувань:

$$p(A) = \frac{k}{n}.$$

**Приклад 1.** З колоди, яка містить 36 карт, навмання витягають одну карту. Яка ймовірність того, що вибраною картою є туз?

■ Нехай подія  $A$  — «вибрана карта — туз». Оскільки в колоді є 4 тузи, то сприяють настанню події  $A$  4 випадки вибору карти. Усіх можливих випадків є 36. Тому

$$p(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}. \blacksquare$$

**Приклад 2.** В учня є 20 зошитів. Серед них — 5 у лінійку, а решта — в клітинку. Яка ймовірність того, що серед шести випадково вибраних зошитів усі будуть у клітинку?

■ Нехай подія  $A$  — «усі 6 вибраних зошитів є зошитами у клітинку». Оскільки учень має 15 зошитів у клітинку, то сприяють настанню події  $A$  число комбінацій з 15 до 6. Усіх можливих варіантів вибору шести зошитів із двадцяти існує  $C_{20}^6$ . Тому ймовірність настан-

ня події  $A$  дорівнює: 
$$p(A) = \frac{C_{15}^6}{C_{20}^6} = \frac{15!}{6! \cdot 9!} = \frac{15! \cdot 14!}{9! \cdot 20!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16} \approx 0,13. \blacksquare$$

Властивості ймовірності:

- $0 \leq p(A) \leq 1$ ;
- ймовірність вірогідної події дорівнює 1;
- ймовірність неможливої події дорівнює 0;
- ймовірність протилежної події ( $\bar{A}$ ) до події  $A$ :  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ .

**Приклад 3.** Ймовірність того, що перший баскетболіст зробить влучний кидок, становить 0,8, а другий — 0,85. Яка ймовірність того, що, виконавши по одному кидку, обидва спортсмени влучать у кошик?

■ Нехай подія  $A$  — «перший баскетболіст зробив влучний кидок», а подія  $B$  — «другий баскетболіст зробив влучний кидок». Події  $A$  та  $B$  незалежні. Тому ймовірність виконання кожної з них дорівнює  $p(AB) = 0,8 \cdot 0,85 \approx 0,68$ . ■

**Приклад 4.** У коробці є 30 курчат: 17 білих, 9 рябих та 4 чорних. Яка ймовірність того, що навмання вибране курча не чорне?

■ Нехай подія  $A$  — «вибране курча не чорне». Тоді протилежна подія  $\bar{A}$  — «вибране курча чорне». Ймовірність події  $\bar{A}$  дорівнює  $p(\bar{A}) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$ . Тоді ймовірність події  $A$ :

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}. \blacksquare$$

**Приклад 5.** Ймовірність того, що біатлоніст не влучить у мішень становить 0,2. Знайти ймовірність того, що п'ять пострілів поспіль будуть влучними.

■ Нехай події  $A_i$  — « $i$ -й постріл біатлоніста — влучний» ( $i = 1; 2; 3; 4; 5$ ), подія  $A$  — «біатлоністу вдалася серія із п'яти влучних пострілів». За умовою,  $p(A_i) = 1 - 0,2 = 0,8$ . Оскільки події  $A_i$  — незалежні, то ймовірність події  $A$ :

$$p(A) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdot p(A_4) \cdot p(A_5) = 0,8^5 = 0,32678 \approx 33\% . \blacksquare$$

**Приклад 6.** Із 30 учнів 10 уміють грати в шахи. Яка ймовірність того, що навмання вибрані 3 учні вміють грати в шахи?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{203}$	$\frac{1}{3}$	3	120

■ Кількість способів вибору 3-х учнів із 30 дорівнює  $C_{30}^3$ . Кількість способів вибору 3-х учнів з 10, які вміють грати в шахи, —  $C_{10}^3$ . Тоді шукана ймовірність:

$$P = \frac{C_{10}^3}{C_{30}^3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{6}{203}$$

Відповідь. Б. ■

**Приклад 7.** Ймовірність того, що Оленка розв'яже задачу, дорівнює 0,8, а ймовірність того, що її розв'яже Остап — 0,7. Знайти ймовірність того, що задачу не розв'яже жоден з учнів.

А	Б	В	Г	Д
0,06	0,3	0,2	0,56	0,44

■ Ймовірність того, що Оленка не розв'яже задачу, дорівнює  $1 - 0,8 = 0,2$ ;  
 ймовірність того, що Остап не розв'яже задачу, дорівнює  $1 - 0,7 = 0,3$ ;  
 Ймовірність того, що задачу не розв'яжуть Оленка й Остап, дорівнює  $0,2 \cdot 0,3 = 0,06$ .

Відповідь. А. ■

**Завдання 28.1–28.24** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**28.1.** У лотереї 10 виграшних квитків і 240 квитків без виграшу. Яка ймовірність виграти в цю лотерею, купивши один квиток?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{25}$

28.2. У ящику з 25 деталей 23 стандартні. Яка ймовірність, що перша навмання взята деталь буде нестандартною?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{23}{25}$	$\frac{25}{23}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{23}$

28.3. З шухляди, у якій лежить 8 червоних, 3 сині та 20 зелених олівців, навмання вийняли один олівець. Яка ймовірність того, що це не зелений олівець?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{31}$	$\frac{8}{31}$	$\frac{20}{31}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{11}{31}$

28.4. Зі слова «математика» навмання вибирають одну літеру. Яка ймовірність того, що виберуть літеру «м»?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$

28.5. Ймовірність того, що стрілець одним пострілом влучає у ціль, дорівнює 0,4. Стрілець виконав два постріли. Знайти ймовірність того, що обома пострілами стрілець влучив у ціль.

А	Б	В	Г	Д
0,4	0,8	0,16	1,6	0,6

28.6. Тричі кидають гральний кубик. Яка ймовірність того, що тричі випаде «4»?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{216}$

28.7. У коробці 10 куль, з них 7 білих. Навмання беруть одну за одною дві кулі, до того ж узятю першу кулю до коробки не повертають. Знайти ймовірність того, що обидві кулі будуть білі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{10}$	$\frac{49}{100}$	$\frac{42}{90}$	$\frac{49}{90}$	$\frac{42}{100}$

28.8. Стрілець ціляє по мішені та влучає в десятку з ймовірністю 0,2, а в дев'ятку — з ймовірністю 0,3. Виконано один постріл. Яка ймовірність того, що вибито не менше дев'яти очок?

А	Б	В	Г	Д
0,06	0,3	0,6	0,9	0,5

28.9. Імовірність закинути у корзину м'яч для першого хлопчика дорівнює 0,6, а для другого — 0,5. Обидва хлопчики роблять по одному кидку. Яка ймовірність того, що хоча б один з них закине м'яч у корзину?

А	Б	В	Г	Д
1,1	0,3	0,7	0,8	0,2

28.10. При увімкненні запалення двигун починає працювати з імовірністю 0,8. Яка ймовірність того, що двигун почав працювати за другого увімкнення?

А	Б	В	Г	Д
0,16	0,64	0,04	0,8	0,2

28.11. Імовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,9. Визначити ймовірність того, що з шести навмання взятих деталей 4 виявляться стандартними.

А	Б	В	Г	Д
$6 \cdot 0,9^4$	$0,9^4 \cdot 0,1^2$	$C_6^4 \cdot 0,9^4$	$C_6^4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1^2$	$C_6^4 \cdot 0,1^2$

28.12. У коробці є шість однакових занумерованих кубиків. Навмання дістають по одному всі кубики. Яка ймовірність того, що номери вийнятих кубиків з'являтимуться в порядку зростання?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6!}$	$\frac{6}{6!}$	$\frac{1}{12}$

28.13. У ящику 100 деталей, з них 6 пофарбовані. Навмання виймають 2 деталі. Яка ймовірність того, що обидві деталі будуть пофарбовані?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{A_6^2 \cdot A_{100}^2}$	$\frac{1}{C_6^2 \cdot C_{100}^2}$	$\frac{C_6^2}{A_{100}^2}$	$\frac{A_6^2}{A_{100}^2}$	$\frac{C_6^2}{C_{100}^2}$

28.14. Набираючи номер телефону, абонент забув останні дві цифри і, пам'ятаючи, що цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано потрібні цифри.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{A_{10}^2}$	$\frac{1}{C_{10}^2}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{2 \cdot 10!}$	$\frac{1}{A_9^2}$

28.15. У мішку лежать 20 однакових на дотик куль: 12 білих та 8 чорних. З мішка навмання витягнуто 8 куль. Яка ймовірність того, що рівно 3 з них чорні?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{C_8^3 \cdot C_{20}^5}{C_{20}^8}$	$\frac{C_{20}^8}{C_8^3 \cdot C_{12}^5}$	$\frac{C_8^3 + C_{12}^5}{C_{20}^8}$	$\frac{A_8^3 \cdot A_{12}^5}{A_{20}^8}$	$\frac{C_8^3 \cdot C_{12}^5}{C_{20}^8}$

28.16. В одному класі з 20 учнів є 8 хлопчиків, а в іншому з 25 учнів — 15 хлопчиків. За жеребкуванням вибирають двох учнів з кожного класу. Яка ймовірність того, що з кожного класу виберуть тільки дівчат?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{A_{12}^2}{A_{20}^2} + \frac{C_{10}^2}{A_{25}^2}$	$\frac{A_{12}^2}{A_{20}^2} \cdot \frac{A_{10}^2}{A_{25}^2}$	$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} + \frac{C_{10}^2}{C_{25}^2}$	$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} \cdot \frac{C_{10}^2}{C_{25}^2}$	$\frac{C_{32}^4}{C_{45}^4}$

28.17. У скриньці є 12 білих і 8 чорних куль. Навмання вибрали 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} \cdot \frac{C_8^2}{C_{20}^2}$	$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} + \frac{C_8^2}{C_{20}^2}$	$\frac{A_{12}^2}{A_{20}^2} \cdot \frac{A_8^2}{A_{20}^2}$	$\frac{A_{12}^2}{A_{20}^2} + \frac{A_8^2}{A_{20}^2}$	$\frac{2}{C_{20}^1}$

28.18. У ящику лежить 31 деталь першого сорту та 6 деталей другого сорту. Навмання вибирають три деталі. Яка ймовірність того, що хоча б одна з деталей першого сорту?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{C_6^3}{C_{37}^3}$	$1 - \frac{C_6^3}{C_{37}^3}$	$\frac{C_{31}^3}{C_{37}^3}$	$1 - \frac{C_{31}^3}{C_{37}^3}$	$\frac{A_6^3}{A_{37}^3}$

28.19. Механізм складається з трьох виробів. Ймовірність браку при виготовленні першого виробу дорівнює 0,1, другого — 0,2, третього — 0,3. Яка ймовірність браку при виготовленні механізму?

А	Б	В	Г	Д
$0,9 + 0,8107 - 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7$	$1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3$	$0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3$	$0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7$	$1 - 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7$

28.20. У сім'ї троє дітей. Знайти ймовірність того, що серед них є хоча б один хлопчик.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0,875	0,125	0,5

28.21. У результаті експерименту відбуваються рівноможливі події, які виключають одна одну. Ймовірність появи кожної з них дорівнює 0,05. Яка кількість цих подій?

А	Б	В	Г	Д
500	50	20	200	1000

**28.22.** Куб, усі грані якого пофарбовано, розрізали на 1000 однакових кубиків. Знайти ймовірність того, що взятий навмання кубик має дві пофарбовані грані.

А	Б	В	Г	Д
0,69	0,96	0,096	0,5	0,001

**28.23.** Велосипедист проїхав 20 км зі швидкістю 10 км/год і 15 км — зі швидкістю 5 км/год. Знайти середню швидкість руху велосипедиста.

А	Б	В	Г	Д
7,5 км/год	7 км/год	5 км/год	12,5 км/год	8 км/год

**28.24.** Середнє арифметичне трьох чисел дорівнює 25, а середнє арифметичне шести інших чисел дорівнює 34. Знайти середнє арифметичне усіх дев'яти чисел.

А	Б	В	Г	Д
5	6	30	60	31

**Завдання 28.25–28.35** передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

**28.25.** Установити відповідність між завданнями (1–4) та відповідями до них (А–Д).

У коробці є 5 червоних, 5 жовтих, 5 синіх і 5 зелених кульок — усього 20 штук. Яка ймовірність, що навмання вийнята кулька буде:

- |                        |        |
|------------------------|--------|
| 1 жовтою               | А 0,75 |
| 2 зеленою або червоною | Б 0    |
| 3 не жовтою            | В 0,5  |
| 4 фіолетовою           | Г 1    |
|                        | Д 0,25 |

**28.26.** Установити відповідність між подіями (1–4) та їхніми ймовірностями (А–Д).

- |   |       |
|---|-------|
| 1 У ящику є 8 білих і 12 червоних куль. Подія: навмання вийнята куля — біла.  | А 0,9 |
| 2 Серед 40 електричних лампочок 4 зіпсованих. Подія: навмання вибрана лампочка — якісна.  | Б 0,8 |
| 3 У лотереї 50 білетів, з них 5 — із грошовими виграшами, 15 — з речовими, решта — без виграшу. Подія: вибраний першим білет без виграшу. | В 0,6 |
| 4 У коробці є 11 червоних, 6 синіх, 13 зелених олівців. Подія: навмання взятий олівець не синій.  | Г 0,4 |
|   | Д 0,2 |



28.27. У ящику є 6 червоних, 8 синіх, 12 зелених і 14 білих куль. Установити відповідність між заданими подіями (1–4) та їхніми ймовірностями (А–Д).

- |   |                   |
|---|-------------------|
| 1 Перша навмання вийнята куля — червона або біла.   | А $\frac{9}{20}$  |
| 2 Перша навмання вийнята куля — червона або зелена. | Б $\frac{11}{20}$ |
| 3 Перша навмання вийнята куля — не червона.         | В $\frac{13}{20}$ |
| 4 Перша навмання вийнята куля — не біла.            | Г $\frac{17}{20}$ |
|   | Д $\frac{1}{2}$   |

28.28. Установити відповідність між заданими подіями (1–4) та їхніми ймовірностями (А–Д).

- |  |                  |
|--|------------------|
| 1 Двічі кидають монету. Подія: обидва рази випадає «герб».   | А $\frac{1}{8}$  |
| 2 Двічі кидають гральний кубик. Подія: обидва рази випадає число «4».  | Б $\frac{1}{27}$ |
| 3 У сім'ї троє дітей. Подія: Усі діти — хлопці.  | В $\frac{1}{16}$ |
| 4 Хлопчик тричі кидає м'яч у корзину. Імовірність влучити у корзину при одному кидку дорівнює $\frac{1}{3}$ . Подія: хлопчик тричі влучив у корзину. | Г $\frac{1}{36}$ |
|  | Д $\frac{1}{4}$  |

28.29. Установити відповідність між подіями (1–4) та їхніми ймовірностями (А–Д).

- |   |                   |
|---|-------------------|
| 1 У коробці є 5 пронумерованих кубиків. Подія: послідовно вийняті кубики будуть впорядковані за зростанням їхніх номерів.                             | А $\frac{1}{45}$  |
| 2 Дівчинка забула останні дві цифри телефонного номера подруги, але пам'ятає, що вони різні. Подія: при першому наборі був набраний правильний номер. | Б $\frac{1}{60}$  |
| 3 На 7 аркушах паперу написали літери А, Б, В, Г, К, Р, Л. Подія: послідовно взяті три аркуші утворили слово «РАК».                                   | В $\frac{1}{90}$  |
| 4 На п'яти кулях написані цифри 1, 2, 3, 4 і 5. Подія: послідовно взяті три кулі утворять найбільше трицифрове число.                                 | Г $\frac{1}{120}$ |
|   | Д $\frac{1}{210}$ |

28.30. Виконали два постріли по мішені. Подія  $A$  — влучення при першому пострілі, подія  $B$  — влучення при другому пострілі. Установити відповідність між заданими подіями (1–4) та їх виразами (А–Д) через операції над подіями  $A$  та  $B$ .

- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 1 Жодного разу не влучили.                              | А $A \cdot B$                       |
| 2 Влучили в мішень хоча б одним пострілом.              | Б $\overline{A} \cdot \overline{B}$ |
| 3 З першого пострілу не влучили, а з другого — влучили. | В $A \cdot \overline{B}$            |
| 4 Двічі влучили в мішень.                               | Г $\overline{A} \cdot \overline{B}$ |
|   | Д $A + B$                           |

28.31. М'яч тричі кидають у баскетбольну корзину. Подія  $A_1$  — м'яч влучив у корзину з першого кидка, подія  $A_2$  — м'яч влучив у корзину з другого кидка, подія  $A_3$  — м'яч влучив у корзину з третього кидка. Установити відповідність між заданими подіями (1–4) та їх виразами (А–Д) через операції над подіями  $A_1, A_2$  та  $A_3$ .

- |   |  |
|---|--|
| 1 М'яч не влучив у корзину жодного разу.    | А $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$                                  |
| 2 М'яч хоча б один раз не влучив у корзину. | Б $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ |
| 3 М'яч хоча б один раз влучив у корзину.    | В $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$            |
| 4 М'яч тричі влучив у корзину.              | Г $A_1 + A_2 + A_3$  |
|   | Д $\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$         |

28.32. Два спортсмени стріляють по одному разу в одну й ту ж ціль. Ймовірність влучання у ціль для першого спортсмена дорівнює 0,8, а для другого — 0,7. Установити відповідність між заданими подіями (1–4) та їхніми ймовірностями (А–Д).

- |   |        |
|---|--------|
| 1 Перший спортсмен влучив у ціль, а другий — не влучив. | А 0,94 |
| 2 Другий спортсмен влучив у ціль, а перший — не влучив. | Б 0,56 |
| 3 У ціль влучив хоча б один спортсмен.                  | В 0,5  |
| 4 У ціль влучили обидва спортсмени.                     | Г 0,24 |
|   | Д 0,14 |

28.33. У ящику є 12 чорних і 8 білих куль. З нього навмання виймають дві кулі, не повертаючи їх до ящика. Установити відповідність між заданими записами (1–4) та їх доповненнями (А–Д) до правильних тверджень.

- |   |                   |
|---|-------------------|
| 1 Ймовірність того, що перша вийнята куля буде чорною, дорівнює...                      | А $\frac{8}{19}$  |
| 2 Якщо перша вийнята куля чорна, то ймовірність того, що друга куля чорна, дорівнює...  | Б $\frac{11}{19}$ |
| 3 Якщо перша вийнята куля чорна, то ймовірність того, що друга куля — біла, дорівнює... | В $\frac{12}{19}$ |
| 4 Якщо перша вийнята куля біла, то ймовірність того, що друга куля чорна, дорівнює...   | Г $\frac{3}{5}$   |
|   | Д $\frac{1}{2}$   |

28.34. Гральний кубик кидають 10 разів. Установити відповідність між подіями (1–4) та виразами (А–Д) для обчислення їх ймовірностей.

1 Рівно 4 рази випаде число «1».

$$A \quad C_{10}^4 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^6$$

2 Рівно 4 рази випаде парне число.

$$B \quad C_{10}^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

3 Рівно 4 рази випаде число, кратне 3.

$$B \quad C_{10}^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

4 Рівно 4 рази випаде число, більше 2.

$$Г \quad C_{10}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$D \quad C_{10}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

28.35. Ряд даних вибірки має вигляд: 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9. Установити відповідність між заданими статистичними характеристиками ряду даних (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 Розмах вибірки.

$$A \quad 4$$

2 Мода.

$$B \quad 5$$

3 Медіана.

$$B \quad 5\frac{4}{9}$$

4 Середнє значення.

$$Г \quad 6$$

$$D \quad 7$$

Розв'яжіть завдання 28.36–28.50. Відповідь запишіть десятковим дробом.

28.36. У партії з 10 деталей 7 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед 6 взятих на вивчення деталей виявиться 4 стандартних.

28.37. Підкидають три гральні кубики. Знайти ймовірність того, що добуток чисел, які випадають на верхній грані, буде парним числом.

28.38. Ймовірність того, що Петрик розв'яже задачу, дорівнює 0,7, а ймовірність того, що задачу розв'яже Михайлик, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що жоден з них не розв'яже цю задачу.

28.39. Два стрільці намагаються влучити в одну мішень. Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем дорівнює 0,6, а другим — 0,9. Знайти ймовірність того, що в мішень влучить тільки один з них.

28.40. У кожній із двох партій є 100 деталей. У першій партії є 5 бракованих деталей, а в другій — 4. Навмання вибирають по одній деталі з кожної партії. Яка ймовірність того, що хоча б одна деталь виявиться бракованою?

28.41. У конверті серед 100 карток є потрібна картка. З конверта навмання витягують 10 карток. Яка ймовірність того, що серед вибраних карток є потрібна?

- 28.42.** Серед 20 уболівальників випадковим чином розподіляють 12 квитків на футбол і 8 — на баскетбол. Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що двоє друзів відвідають одні й ті ж змагання.
- 28.43.** На деякій прямій узято 3 точки, а на паралельній до неї прямій — 4 точки. Навмання вибирають 3 точки. Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що вони будуть вершинами трикутника.
- 28.44.** В урні 10 куль. Скільки в урні білих куль, якщо ймовірність того, що 3 навмання вибрані кулі будуть білими, дорівнює  $\frac{1}{6}$ ?
- 28.45.** Ймовірність хоча б одного влучення в ціль чотирьох пострілів дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення у ціль одним пострілом.
- 28.46.** Під час тестування з математики учень має відповісти на 5 запитань. Ймовірність того, що він правильно відповість на одне запитання, дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, учневі потрібно дати правильну відповідь не менше ніж на 3 запитання. Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що учень складе тест.
- 28.47.** Монету кидають 6 разів. Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що випаде більше разів «герб», ніж «число».
- 28.48.** Два гравці по черзі кидають монету. Переможе той, у кого раніше з'явиться «герб». Знайти з точністю до 0,01 ймовірність виграшу для того, хто починає гру.
- 28.49.** Ймовірність виграшу в грошово-речовій лотереї на кожен квиток дорівнює 0,5. Скільки найменше потрібно купити лотерейних квитків, щоб з ймовірністю не менше ніж 0,999 отримати виграш принаймні по одному квитку?
- 28.50.** Ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань подія А настане хоча б один раз, дорівнює 0,8704. Знайти ймовірність ненастання події А за одного випробування, якщо вона під час усіх випробувань однакова.

## ТЕМА 29. ТРИКУТНИК

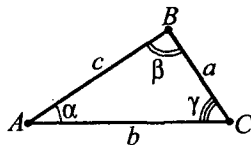
### 1. Властивості сторін і кутів.

$$c - b < a < c + b, b < c.$$

Проти більшої сторони трикутника лежить більший кут: якщо  $b > a$ , то  $\beta > \alpha$ ; і навпаки, якщо  $\beta > \alpha$ , то  $b > a$ ; а також, якщо  $a = b$ , то  $\alpha = \beta$ .

Сума кутів трикутника:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

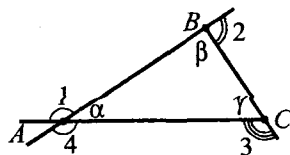
Периметр трикутника:  $P = a + b + c$ .



### 2. Зовнішній кут.

$\angle 1, \angle 2, \angle 3$  — зовнішні кути трикутника  $ABC$ , кути 1 і 4 — зовнішні кути при вершині  $A$ .

$$\angle 1 = \gamma + \beta. \quad \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ.$$



### 3. Медіана.

$CK = KB, AK$  — медіана.

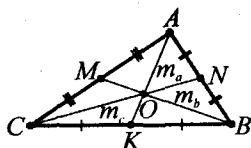
$m_a$  — медіана, проведена до сторони  $a$ .

Медіани перетинаються в одній точці й діляться нею у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.

$$AO : OK = BO : OM = CO : ON = 2 : 1.$$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2};$$

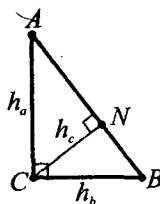
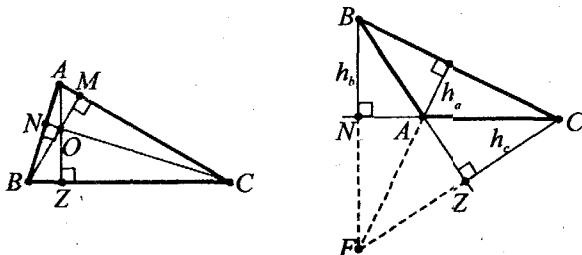
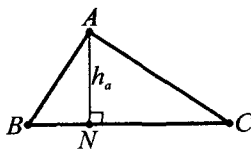
$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$



### 4. Висота.

$AN \perp BC, AN$  — висота.

$h_a$  — висота, проведена з вершини  $A$ . Висоти трикутника або їх продовження перетинаються в одній точці. У гострокутному трикутнику точка  $O$  перетину висот розміщена всередині трикутника; у тупокутному (точка  $F$ ) — поза трикутником; у прямокутному (точка  $C$ ) — у вершині прямого кута.



$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Будь-яку висоту трикутника можна знайти за формулами  $h_a = c \sin \beta$ ,  $h_a = \frac{2S}{a}$ , де  $S$  — площа трикутника.

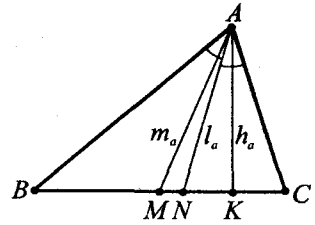
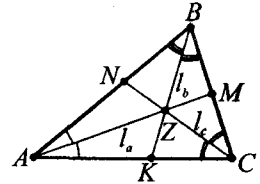
### 5. Бісектриса.

$$\angle ABK = \angle CBK, BK \text{ — бісектриса. } \frac{AB}{BC} = \frac{KA}{KC}.$$

$l_b$  — бісектриса кута  $B$ .

Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

У нерівнобедреному трикутнику кожна бісектриса лежить між медіаною і висотою, проведеними з цієї ж вершини:  
 $h_a < l_a < m_a$ .



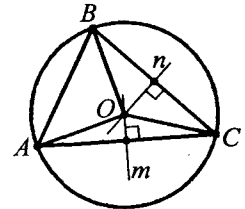
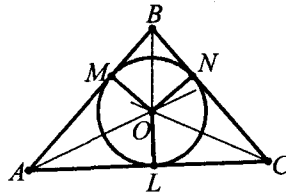
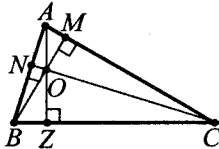
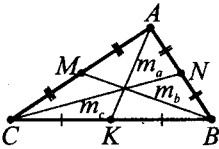
### 6. Визначні точки.

Точка перетину  
медіан  
(центр мас)

Точка перетину  
висот або їх  
продовжень  
(ортоцентр)

Точка перетину  
бісектрис  
(інцентр) —  
центр вписаного кола

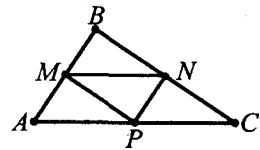
Точка перетину  
серединних перпендикулярів до сторін  
трикутника —  
центр описаного  
кола



### 7. Середня лінія.

Середня лінія трикутника — це відрізок, який з'єднує середини двох його сторін.

$NK$  — середня лінія трикутника  $ABC$ .



Середня лінія трикутника паралельна до однієї з його сторін і дорівнює половині цієї сторони. Наприклад,  $MN = \frac{1}{2} AC$  і  $MN \parallel AC$ .

### 8. Ознаки рівності.

Два трикутники рівні між собою, якщо в них відповідно рівні:

- 1) дві сторони та кут між ними;
- 2) сторона та прилеглі до неї кути;
- 3) три сторони.

### 9. *Ознаки подібності.*

Два трикутники подібні між собою ( $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ), якщо:

1) два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника:  
 $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$ ;

2) дві сторони одного трикутника відповідно пропорційні до двох сторін іншого трикутника, а кути, утворені цими сторонами, рівні:  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = k, \angle A = \angle A_1$ ;

3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого трикутника:  
 $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = k$ , де  $k$  — коефіцієнт подібності.

Якщо  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , то  $\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = k, \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = k^2$ .

Пряма, яка паралельна до сторони трикутника і перетинає дві інші його сторони, відтинає від даного трикутника подібний йому.

### 10. *Співвідношення між сторонами та кутами.*

Теорема синусів:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ .

Наслідок теореми синусів:  $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ , де  $R$  — радіус описаного кола.

Теорема косинусів:  $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\beta$ .

### 11. *Площа.*

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

$$S = \frac{1}{2}ac \sin \beta.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ де } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ — формула Герона.}$$

$$S = \frac{abc}{4R}, S = pr, \text{ де } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

### 12. *Радіуси вписаного й описаного кіл.* $R = \frac{abc}{4S}, r = \frac{2S}{a+b+c}$ .

**Приклад 1.** Сторони трикутника дорівнюють 4 см і 8 см. Яке найменше ціле значення повинна мати третя сторона, щоб кут між двома даними сторонами був тупим?

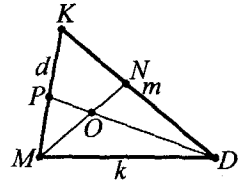
А	Б	В	Г	Д
81 см	6 см	10 см	9 см	13 см

■ Якщо в трикутнику зі сторонами  $a, b$  і  $c$  справджується нерівність  $a^2 + b^2 < c^2$ , то кут, протилежний стороні  $c$ , тупий. Маємо:  $4^2 + 8^2 < c^2$ ;  $80 < c^2$ ;  $c > 9$ .

Відповідь. В. ■

**Приклад 2.** У трикутнику  $MKD$   $\angle K = 60^\circ$ . Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 2 см. Скільки сантиметрів має радіус кола, описаного навколо трикутника  $MOD$ , де  $O$  — точка перетину бісектрис трикутника  $MKD$ ?

■ Нехай  $MKD$  — заданий трикутник, у якого  $MK = d$ ,  $KD = m$ ,  $MD = k$ ,  $\angle K = 60^\circ$ ,  $R$  — радіус описаного кола,  $R = 2$  см,  $O$  — точка перетину бісектрис. За наслідком з теореми синусів  $\frac{k}{\sin \angle K} = 2R$ .



Отримаємо:  $k = 2R \sin \angle K = 2 \cdot 2 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$  (см), тобто  $MD = 2\sqrt{3}$  (см).

Нехай  $\angle M = 2x^\circ$ ,  $\angle D = 2y^\circ$ . За теоремою про суму кутів трикутника  $\angle M + \angle D + \angle K = 180^\circ$ ;  $2x + 2y + 60^\circ = 180^\circ$ ;  $2x + 2y = 120^\circ$ ;  $x + y = 60^\circ$ .

Оскільки  $MO$  і  $DO$  — бісектриси кутів  $M$  і  $D$  відповідно, то  $\angle OMD = x^\circ$ ,  $\angle ODM = y^\circ$ .

Із трикутника  $MOD$ :  $x + y + \angle MOD = 180^\circ$ ;  $\angle MOD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

За наслідком з теореми синусів  $\frac{MD}{\sin \angle MOD} = 2R_1$ , де  $R_1$  — радіус кола, описаного на-

вколо трикутника  $MOD$ .  $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2R_1$ ,  $R_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$  (см).

Відповідь. 2. ■

**Завдання 29.1–29.21** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**29.1.** У трикутнику  $ABC$  сторони  $AB$  і  $AC$  відповідно дорівнюють 6 см і 10 см. Указати всі можливі значення довжини сторони  $BC$ .

А	Б	В	Г	Д
$BC < 16$ см	$6 \text{ см} < BC < 16$ см	$6 \text{ см} < BC < 10$ см	$4 \text{ см} < BC < 16$ см	$5 \text{ см} < BC < 15$ см

**29.2.** Градусні міри кутів трикутника відносяться як 3 : 2 : 10. Знайти градусну міру найменшого кута трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$12^\circ$	$20^\circ$	$24^\circ$	$36^\circ$	$18^\circ$

**29.3.** Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють  $70^\circ$  і  $150^\circ$ . Знайти внутрішній кут при третій вершині.

А	Б	В	Г	Д
$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$100^\circ$	$140^\circ$

**29.4.** У трикутнику  $ABC$   $\angle A = 50^\circ$ ,  $\angle B = 70^\circ$ . Визначити гострий кут, утворений бісектрисами даних кутів.

А	Б	В	Г	Д
$25^\circ$	$30^\circ$	$55^\circ$	$35^\circ$	$60^\circ$



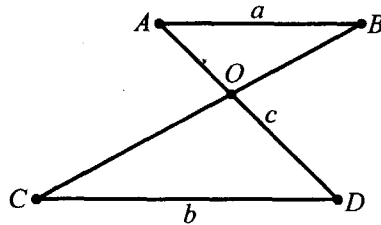
29.5. У трикутнику  $ABC$   $\angle A = 30^\circ$  і  $\angle B = 105^\circ$ . Знайти відношення  $\frac{BC}{AB}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

29.6. У трикутнику  $ABC$   $AB = \sqrt{3}$  см,  $AC = 2$  см і  $\angle A = 30^\circ$ . Знайти довжину медіани  $BM$ .

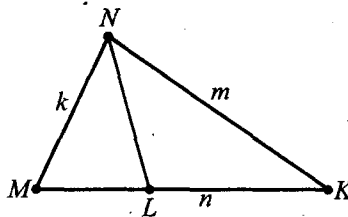
А	Б	В	Г	Д
7	$\sqrt{7}$	1	$\sqrt{13}$	$\sqrt{11}$

29.7.  $O$  — точка перетину відрізків  $AD$  і  $BC$ , відрізки  $AB$  і  $CD$  паралельні.  $AB = a$ ,  $CD = b$ . Знайти  $AO$ , якщо  $OD = c$ .



А	Б	В	Г	Д
$\frac{b}{ac}$	$\frac{bc}{a}$	$\frac{a}{bc}$	$abc$	$\frac{ac}{b}$

29.8. У трикутнику  $MNK$   $MN = k$ ,  $NK = m$  і  $MK = n$ ,  $NL$  — бісектриса трикутника. Знайти довжину відрізка  $ML$ .



А	Б	В	Г	Д
$\frac{k}{k+m+n}$	$kmn$	$\frac{kn}{m}$	$\frac{kn}{k+m}$	$\frac{mn}{k+m}$

29.9. Відповідні сторони подібних трикутників дорівнюють 14 см і 21 см. Знайти площу меншого трикутника, якщо площа більшого трикутника дорівнює  $180 \text{ см}^2$ .

А	Б	В	Г	Д
$80 \text{ см}^2$	$120 \text{ см}^2$	$60 \text{ см}^2$	$100 \text{ см}^2$	$90 \text{ см}^2$

29.10. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см. Знайти висоту, проведену до цієї сторони, якщо площа трикутника дорівнює  $35 \text{ см}^2$ .

А	Б	В	Г	Д
2,5 см	5 см	7,5 см	10 см	12,5 см

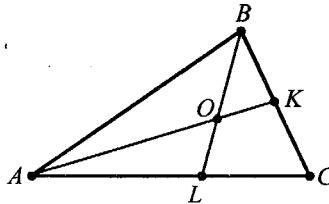
29.11. Два кути трикутника дорівнюють  $\alpha$  і  $\beta$ , а радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює  $R$ . Визначити площу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$4R^2 \sin(\alpha + \beta)$	$2R^2 \sin(\alpha + \beta)$	$2R^2 \sin \alpha \sin \beta$	$4R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$	$2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$

29.12. Дві сторони трикутника дорівнюють 48 см і 28 см. Указати всі можливі значення периметра трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$20 \text{ см} < P < 76 \text{ см}$	$76 \text{ см} < P < 152 \text{ см}$	$20 \text{ см} < P < 152 \text{ см}$	$96 \text{ см} < P < 152 \text{ см}$	$76 \text{ см} < P < 96 \text{ см}$

29.13.  $O$  — точка перетину бісектрис  $AK$  і  $BL$  трикутника  $ABC$ . Знайти  $\angle AOB$ , якщо  $\angle C = 50^\circ$ .



А	Б	В	Г	Д
$100^\circ$	$115^\circ$	$120^\circ$	$130^\circ$	$135^\circ$

29.14. Градусні міри зовнішніх кутів трикутника  $ABC$  при вершинах  $A$ ,  $B$  і  $C$  відносяться як  $3 : 4 : 5$ . Як відносяться градусні міри внутрішніх кутів трикутника при вершинах  $A$ ,  $B$  і  $C$ ?

А	Б	В	Г	Д
$3 : 4 : 5$	$5 : 4 : 3$	$3 : 2 : 1$	$7 : 8 : 9$	$9 : 8 : 7$

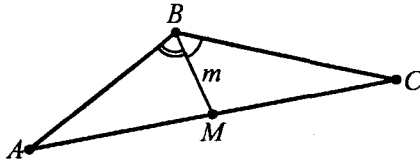
29.15. Кути трикутника відносяться як  $1 : 2 : 3$ . Знайти відношення протилежних їм сторін.

А	Б	В	Г	Д
$1 : 2 : 3$	$3 : 2 : 1$	$1 : 3 : 2$	$1 : \sqrt{3} : 2$	$1 : \sqrt{2} : 2$

29.16. Сторони трикутника дорівнюють 7 см, 8 см і 10 см. Знайти косинус найбільшого кута цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{29}{140}$	$\frac{23}{112}$	$\frac{19}{140}$	$\frac{13}{112}$	$\frac{13}{56}$

29.17. У трикутнику  $ABC$   $BM$  — медіана,  $\angle ABM = \alpha$ ,  $\angle MBC = \beta$ ,  $BM = m$ . Визначити сторону  $AB$ .

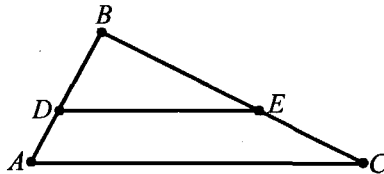


А	Б	В	Г	Д
$\frac{2m \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$	$2m \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$	$\frac{2m \sin \beta}{\sin \alpha}$	$2m \sin \alpha \sin \beta$	$\frac{2m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

29.18. Два трикутники подібні. Сторони одного з них дорівнюють 7 см, 12 см і 16 см, а сторони іншого — 40 см, 30 см та  $x$  см. Знайти  $x$ .

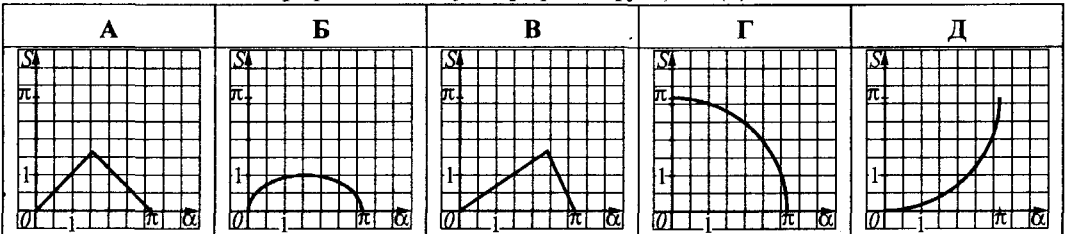
А	Б	В	Г	Д
18 см	17,5 см	20 см	24 см	18,5 см

29.19. У трикутнику  $ABC$  відрізок  $DE$  з кінцями на сторонах  $AB$  і  $BC$  паралельний до сторони  $AC$ .  $S_{\Delta DBE} = 4 \text{ см}^2$ ,  $S_{\Delta DEC} = 5 \text{ см}^2$ ,  $DE = 7$  см. Знайти довжину  $AC$ .

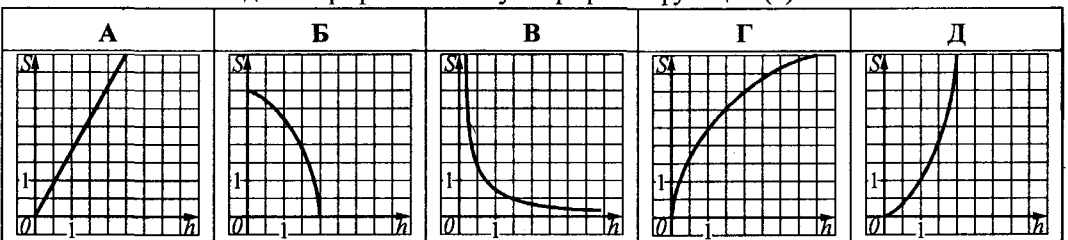


А	Б	В	Г	Д
9,5 см	$9\frac{2}{3}$ см	12 см	10,5 см	9 см

29.20.  $S(\alpha)$  — площа трикутника з даними сторонами  $a$  і  $b$  та змінним кутом  $\alpha$  між ними. Який з наведених графіків може бути графіком функції  $S(\alpha)$ ?



29.21.  $S(h)$  — площа трикутника з даною стороною  $a$  і змінною висотою  $h$ , проведеною до неї. Який з наведених графіків може бути графіком функції  $S(h)$ ?



Завдання 29.22–29.25 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

29.22. Установити відповідність між елементами (1–4) рівностороннього трикутника зі стороною  $a$  та їхніми величинами (А–Д).

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| 1 Висота                | А $\frac{\sqrt{3}}{6}a$ |
| 2 Радіус вписаного кола | Б $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ |
| 3 Кут між медіанами     | В $30^\circ$            |
| 4 Радіус описаного кола | Г $60^\circ$            |
|                         | Д $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ |

29.23. Установити відповідність між коефіцієнтами подібності (1–4) двох трикутників і відношенням їх площ (А–Д).

- |             |      |
|-------------|------|
| 1 $k_1 = 2$ | А 25 |
| 2 $k_2 = 3$ | Б 9  |
| 3 $k_3 = 4$ | В 16 |
| 4 $k_4 = 5$ | Г 36 |
|             | Д 4  |

29.24. Установити відповідність між довжинами сторін (1–4), які лежать проти кута  $30^\circ$  у прямокутних трикутниках, і довжинами діаметрів (А–Д), описаних навколо трикутників кіл.

- |         |      |
|---------|------|
| 1 2 см  | А 8  |
| 2 4 см  | Б 20 |
| 3 10 см | В 4  |
| 4 15 см | Г 10 |
|         | Д 30 |

29.25. Установити відповідність між сторонами трикутників (1–4) та їх площами (А–Д).

- |                       |                     |
|-----------------------|---------------------|
| 1 4 см, 5 см, 3 см    | А $96 \text{ см}^2$ |
| 2 8 см, 10 см, 6 см   | Б $48 \text{ см}^2$ |
| 3 16 см, 20 см, 12 см | В $6 \text{ см}^2$  |
| 4 12 см, 15 см, 9 см  | Г $54 \text{ см}^2$ |
|                       | Д $24 \text{ см}^2$ |

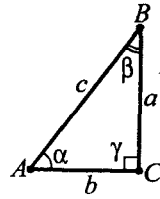
Розв'яжіть завдання 29.26–29.39. Відповідь запишіть десятковим дробом.

29.26. Величини кутів трикутника  $ABC$  при вершинах  $A$ ,  $B$  і  $C$  відносяться, як  $5 : 6 : 7$ . Знайти в градусах величину кута між висотою  $CD$  і бісектрисою кута  $A$  трикутника.

- 29.27. Знайти площу  $S$  гострокутного трикутника у квадратних сантиметрах, якщо дві його сторони дорівнюють 2 см і 1 см, а квадрат косинуса кута між ними дорівнює  $\frac{1}{4}$ . У відповідь записати  $\sqrt{3S}$ .
- 29.28. У трикутнику  $ABC$  висота  $BK$  поділяє сторону  $AC$  на відрізки 1 і 3. Знайти квадрат медіани  $BM$  трикутника  $ABC$ , якщо  $BK = 2$ .
- 29.29. У трикутнику  $ABC$  проведено медіану  $AK$ , яка дорівнює  $\frac{13\sqrt{2}}{4}$  й утворює зі стороною  $AC$  кут  $30^\circ$ . Знайти  $BC$ , якщо  $\angle BCA = 45^\circ$ .
- 29.30. Периметр трикутника дорівнює 50, а його бісектриса ділить протилежну сторону на відрізки завдовжки 15 і 5. Знайти меншу сторону трикутника.
- 29.31. Сторона трикутника дорівнює 10. Знайти квадрат довжини відрізка прямої, яка паралельна до цієї сторони та ділить площу трикутника навпіл.
- 29.32. Одна зі сторін трикутника дорівнює 2, а прилеглі до неї кути дорівнюють  $30^\circ$  і  $45^\circ$ . Знайти площу трикутника з точністю до 0,01.
- 29.33. Знайти площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 28 і 30, а медіана, яка проведена до третьої сторони, дорівнює 13.
- 29.34. На сторонах  $AB$  і  $AC$  трикутника  $ABC$  відповідно позначено такі точки  $M$  і  $K$ , що  $\angle AMK = \angle C$ ,  $AM = 4$ ,  $MB = 2$  і  $AK = 3$ . Знайти довжину відрізка  $KC$ .
- 29.35. Відношення двох внутрішніх кутів трикутника дорівнює 2 : 3, а зовнішніх кутів при цих же вершинах 11 : 9. Знайти в градусах третій внутрішній кут трикутника.
- 29.36. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 5 см і 6 см. Знайти з точністю до 0,01 см довжину медіани, проведеної до сторони завдовжки 5 см.
- 29.37. Одна зі сторін трикутника дорівнює 10, а медіани, що проведені до двох інших сторін, дорівнюють 9 і 12. Знайти площу трикутника.
- 29.38. Дві сторони трикутника дорівнюють  $b$  і  $c$ , а бісектриса кута між ними дорівнює  $l$ . Визначити третю сторону трикутника й обчислити її значення, якщо  $b = 1$ ,  $c = 4$ ,  $l = \sqrt{3}$ .
- 29.39. У трикутнику, дві сторони якого дорівнюють  $a$  і  $b$ , сума висот, опущених на ці сторони, дорівнює третій висоті. Визначити третю сторону й обчислити її значення, якщо  $a = 2$ ,  $b = 6$ .

## ТЕМА 30. ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

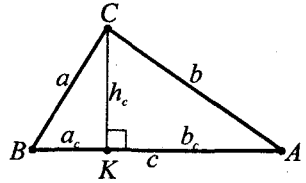
1. **Означення.**  $\angle C = 90^\circ$ , трикутник  $ABC$  — прямокутний.  
 $a, b$  — катети,  $c$  — гіпотенуза,  $\angle \alpha + \angle \beta = 90^\circ$ .
2. **Теорема Піфагора:**  $c^2 = a^2 + b^2$ .



3. **Залежність між сторонами та кутами.**  
 $a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta$ ,  $b = c \sin \beta = c \cos \alpha = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{ctg} \alpha$ .

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

4. **Метричні співвідношення.**  
 $h_c^2 = a_c \cdot b_c$ ,  $a^2 = a_c \cdot c$ ,  $b^2 = b_c \cdot c$ .



5. **Радіуси вписаного ( $r$ ) й описаного ( $R$ ) кіл.**

$$R = \frac{1}{2}c, \quad R = m_c.$$

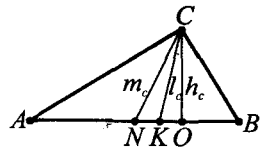
$$r = \frac{a+b-c}{2}, \quad r = \frac{ab}{a+b+c}$$

6. **Площа.**  
 $S = \frac{1}{2}ab$ ,  $S = \frac{1}{2}ch_c$ ,  $S = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg} \beta$ ,  $S = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg} \alpha$ .

7. **Прямокутний трикутник з кутом  $30^\circ$ .**

Якщо  $\alpha = 30^\circ$ , то  $a = \frac{1}{2}c$ .

8. У прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута поділяє навпіл кут між висотою і медіаною, проведеними з цієї ж вершини:  $\angle NCK = \angle OCK$ .



9. **Ознаки рівності.**

Два прямокутні трикутники рівні між собою, якщо в них відповідно рівні:

- 1) гіпотенуза та гострий кут;
- 2) катет і гострий кут;
- 3) гіпотенуза та катет;
- 4) два катети.

13. **Ознаки подібності.**

Два прямокутні трикутники подібні між собою, якщо:

- 1) гострий кут одного трикутника дорівнює гострому куту іншого трикутника;

- 2) катети одного трикутника відповідно пропорційні катетам іншого трикутника;  
 3) гіпотенуза та катет одного трикутника пропорційні гіпотенузі та катету іншого трикутника.

**Приклад 1.** Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до іншого катета, — 13 см. Знайти гіпотенузу трикутника.

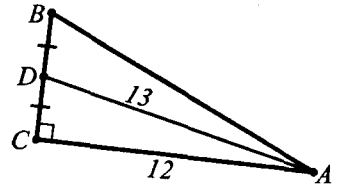
А	Б	В	Г	Д
5 см	$2\sqrt{61}$ см	25 см	22 см	26 см

■ Із трикутника  $ACD$ :  $CD = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$  (см).

$CB = 2CD = 2 \cdot 5 = 10$  (см).

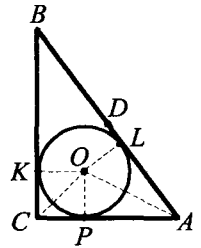
З трикутника  $ABC$ :  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} =$   
 $= \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$  (см).

Відповідь. Б. ■



**Приклад 2.** Знайти площу прямокутного трикутника у квадратних метрах, якщо радіуси вписаного в нього й описаного навколо нього кіл відповідно дорівнюють 2 м і 5 м.

■ Нехай трикутник  $ABC$  заданий. У нього:  $\angle C = 90^\circ$ ,  $r$  — радіус вписаного кола,  $r = 2$  м,  $R$  — радіус описаного кола,  $R = 5$  м. У прямокутному трикутнику центр описаного кола  $D$  є серединою гіпотенузи і його радіус дорівнює половині гіпотенузи. Отже,  $DA = DB = R = 5$  м.



Нехай точка  $O$  — центр вписаного в трикутник кола;  $OK$ ,  $OP$ ,  $OL$  — радіуси, проведені в точки дотику кола зі сторонами трикутника. Тоді  $OK \perp BC$ ,  $OP \perp CA$ ,  $\angle C = 90^\circ$  і тому  $CPOK$  — прямокутник. Звідки:  $OK = CP = r = 2$  м;  $OP = KC = r = 2$  м. За властивістю дотичних до кола відрізки дотичних, проведених з однієї точки до точок дотику, рівні. Тому  $BK = BL$ ,  $AP = AL$  і  $CP = CK$ . Знайдемо периметр трикутника  $ABC$ :  $P = KB + BL + LA + AP + PC + CK =$   
 $= BL + BL + LA + LA + PC + PC = 2BL + 2LA + 2PC = 2(BL + LA) + 2PC = 2BA + 2PC = 2 \cdot 2R +$   
 $+ 2r = 4R + 2r = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 24$  (м). Площу трикутника знайдемо з формули  $S = \frac{1}{2} P \cdot r$ , де

$P$  — периметр,  $r$  — радіус вписаного кола. Маємо:  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2 = 24$  (м<sup>2</sup>).

Відповідь. 24. ■

**Завдання 30.1–30.21** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**30.1.** Один з гострих кутів прямокутного трикутника на  $18^\circ$  більший від іншого. Знайти більший з цих кутів.

А	Б	В	Г	Д
$66^\circ$	$68^\circ$	$36^\circ$	$54^\circ$	$48^\circ$

30.2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють  $a$  і  $b$  ( $a > b$ ). Визначити довжину медіани, проведеної до меншого катета.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$	$\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$	$\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$	$\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$

30.3. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, що проведена до нього, дорівнює 8 см. Знайти інший катет трикутника.

А	Б	В	Г	Д
8 см	$2\sqrt{7}$ см	$4\sqrt{5}$ см	12 см	$8\sqrt{5}$ см

30.4. Один з катетів і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 5 см і 13 см. Знайти площу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$65 \text{ см}^2$	$32,5 \text{ см}^2$	$30 \text{ см}^2$	$60 \text{ см}^2$	$130 \text{ см}^2$

30.5. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 60 см і 80 см. Знайти висоту трикутника, проведеної до гіпотенузи.

А	Б	В	Г	Д
24 см	36 см	48 см	56 см	96 см

30.6. Катет та гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 10 см і 26 см. Знайти проекцію цього катета на гіпотенузу.

А	Б	В	Г	Д
8 см	5,2 см	$7\frac{8}{13}$ см	2,6 см	$3\frac{11}{13}$ см

30.7. Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, у якого висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює  $6\sqrt{3}$  см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
12 см	18 см	24 см	28 см	32 см

30.8. Довжина гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ . Обчислити площу круга, описаного навколо трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{5}$	$4\pi$	$\frac{4\pi}{5}$	$5\pi$	$\pi^2$

30.9. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює  $b$ , а протилежний до нього кут —  $\beta$ . Визначити радіус кола, описаного навколо трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{b}{2 \sin \beta}$	$\frac{b}{2 \cos \beta}$	$\frac{b \sin \beta}{2}$	$\frac{2b}{\sin \beta}$	$\frac{2b}{\cos \beta}$



30.10. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює  $\alpha$ . Визначити катет, прилеглий до цього кута, якщо радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює  $r$ .

А	Б	В	Г	Д
$r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$	$r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$	$r \left( 1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)$	$r \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$	$2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

30.11. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

А	Б	В	Г	Д
4 см	2 см	8 см	8,5 см	6 см

30.12. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює  $\alpha$ , а висота, що проведена до гіпотенузи, дорівнює  $h$ . Визначити площу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{h^2}{2 \sin \alpha}$	$2h^2 \sin 2\alpha$	$h^2 \sin 2\alpha$	$\frac{h^2}{2 \sin 2\alpha}$	$\frac{h^2}{\sin 2\alpha}$

30.13. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться як 1 : 2. Знайти відношення протилежних їм катетів.

А	Б	В	Г	Д
1 : 2	1 : 3	1 : $\sqrt{2}$	1 : $\sqrt{3}$	1 : $\sqrt{5}$

30.14. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а гіпотенуза дорівнює 20 см. Знайти менший з відрізків, на які поділяє гіпотенузу бісектриса прямого кута.

А	Б	В	Г	Д
$8\frac{4}{7}$ см	$6\frac{5}{12}$ см	6 см	5 см	$4\frac{2}{7}$ см

30.15. Бісектриси двох кутів прямокутного трикутника утворюють при перетині кут  $79^\circ$ . Знайти менший гострий кут трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$11^\circ$	$17^\circ$	$22^\circ$	$34^\circ$	$44^\circ$

30.16. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює  $27^\circ$ . Знайти кут між бісектрисою і висотою трикутника, проведеними з вершини прямого кута.

А	Б	В	Г	Д
$8^\circ$	$16^\circ$	$32^\circ$	$28^\circ$	$18^\circ$

30.17. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює  $32^\circ$ . Знайти кут між висотою і медіаною, проведеними з вершини прямого кута.

А	Б	В	Г	Д
$32^\circ$	$26^\circ$	$36^\circ$	$33^\circ$	$23^\circ$

30.18. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки у відношенні 3 : 4. У якому відношенні ділить гіпотенузу висота?

А	Б	В	Г	Д
3 : 4	$\sqrt{3} : 2$	9 : 16	2 : 3	1 : 2

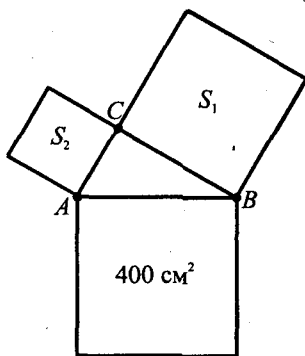
30.19. Знайти площу прямокутного трикутника, у якого бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4 см і 8 см.

А	Б	В	Г	Д
32 см <sup>2</sup>	16 см <sup>2</sup>	57,6 см <sup>2</sup>	28,8 см <sup>2</sup>	14,4 см <sup>2</sup>

30.20. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Якою найбільшою може бути площа трикутника?

А	Б	В	Г	Д
75 см <sup>2</sup>	100 см <sup>2</sup>	50 см <sup>2</sup>	25 см <sup>2</sup>	12,5 см <sup>2</sup>

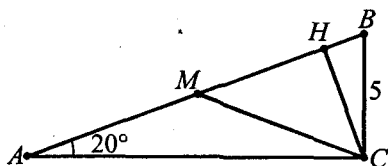
30.21. На сторонах прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) побудовані квадрати. Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює 400 см<sup>2</sup>, а різниця площ квадратів, побудованих на катетах, дорівнює 112 см<sup>2</sup>. Знайти площу трикутника.



А	Б	В	Г	Д
168 см <sup>2</sup>	84 см <sup>2</sup>	96 см <sup>2</sup>	192 см <sup>2</sup>	48 см <sup>2</sup>

Завдання 30.22–30.25 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

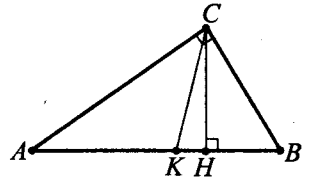
30.22. На рисунку зображено прямокутний трикутник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ), його висоту  $CH$ , медіану  $CM$  і позначено величини деяких його елементів. Установити відповідність між елементами трикутника (1–4) та їхніми величинами (А–Д).



- 1  $\angle MCH$
- 2  $\angle CMH$
- 3  $CM$
- 4  $CH$

- А  $\frac{5}{2 \sin 20^\circ}$
- Б  $5 \sin 20^\circ$
- В  $50^\circ$
- Г  $5 \sin 70^\circ$
- Д  $40^\circ$

- 30.23. У прямокутному трикутнику  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) проведено бісектрису  $CK$  та висоту  $CH$ . Установити відповідність між значеннями кута при вершині  $A$  (1–4), розміщеній зі сторони бісектриси, і кутом  $KCH$  (А–Д).



- |              |              |
|--------------|--------------|
| 1 $8^\circ$  | А $27^\circ$ |
| 2 $32^\circ$ | Б $33^\circ$ |
| 3 $28^\circ$ | В $37^\circ$ |
| 4 $18^\circ$ | Г $13^\circ$ |
|              | Д $17^\circ$ |
- 30.24. Установити відповідність між катетами  $a$  й  $b$  (1–4) прямокутних трикутників і значеннями гострого кута, протилежного до катета  $a$  (А–Д).
- |                                    |                |
|------------------------------------|----------------|
| 1 2 см, 2 см                       | А $22,5^\circ$ |
| 2 1 см, $\sqrt{3}$ см              | Б $45^\circ$   |
| 3 $\sqrt{3}$ см, 1 см              | В $60^\circ$   |
| 4 $2 - \sqrt{2}$ см, $\sqrt{2}$ см | Г $90^\circ$   |
|                                    | Д $30^\circ$   |
- 30.25. Установити відповідність між довжинами гіпотенуз і катетів (1–4) прямокутних трикутників і їх площами (А–Д).
- |               |                     |
|---------------|---------------------|
| 1 5 см, 3 см  | А $84 \text{ см}^2$ |
| 2 13 см, 5 см | Б $6 \text{ см}^2$  |
| 3 10 см, 8 см | В $24 \text{ см}^2$ |
| 4 25 см, 7 см | Г $48 \text{ см}^2$ |
|               | Д $30 \text{ см}^2$ |

Розв'яжіть завдання 30.26–30.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.

- 30.26. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника утворює з протилежною стороною кута, один з яких дорівнює  $70^\circ$ . Знайти у градусах менший гострий кут трикутника.
- 30.27. Катети прямокутного трикутника відносяться як 2 : 1, а гіпотенуза дорівнює  $5\sqrt{5}$  см. Знайти у сантиметрах більший катет.
- 30.28. Катет прямокутного трикутника дорівнює 28 см, різниця двох інших його сторін дорівнює 8 см. Знайти у сантиметрах гіпотенузу.
- 30.29. У прямокутному трикутнику висота і медіана, проведені до гіпотенузи, відповідно дорівнюють 24 см і 25 см. Знайти у сантиметрах периметр трикутника.
- 30.30. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 12, а тангенс прилеглого кута дорівнює  $\frac{5}{6}$ . Знайти квадрат довжини гіпотенузи.
- 30.31. Проекції катетів прямокутного трикутника на гіпотенузу дорівнюють 4 см і 21 см. Знайти у сантиметрах менший катет.

- 30.32. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює  $\sqrt{5}$  см, а проекція іншого катета на гіпотенузу дорівнює 4 см. Знайти у сантиметрах гіпотенузу.
- 30.33. Точка дотику вписаного в прямокутний трикутник кола ділить гіпотенузу на відрізки 3 см і 10 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу трикутника.
- 30.34. Точка дотику вписаного в прямокутний трикутник кола ділить гіпотенузу на відрізки 4 см і 6 см. Знайти у сантиметрах радіус вписаного кола.
- 30.35. Знайти у квадратних сантиметрах площу прямокутного трикутника, якщо його висота ділить гіпотенузу на відрізки 18 см і 32 см.
- 30.36. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки, що дорівнюють  $m$  і  $n$ . Визначити висоту, проведену з вершини прямого кута й обчислити її значення, якщо  $m = 3$ ,  $n = 4$ .
- 30.37. У прямокутному трикутнику висота і бісектриса, проведені з вершини прямого кута, відповідно дорівнюють  $h$  і  $l$ . Визначити площу трикутника й обчислити її значення, якщо  $h = 0,5$ ,  $l = 0,7$ .
- 30.38. У прямокутний трикутник вписано коло радіуса  $r$ . Визначити синус меншого гострого кута трикутника, якщо довжина гіпотенузи  $5r$ .
- 30.39. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює  $h$ , а відстань від вершини прямого кута до точки перетину бісектриси меншого гострого кута з меншим катетом дорівнює  $d$ . Визначити довжину меншого катета й обчислити її значення, якщо  $h = 7$ ,  $d = 5$ .
- 30.40. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 12, а гіпотенуза — 13. Знайти квадрат довжини бісектриси трикутника, проведеної з вершини меншого кута.

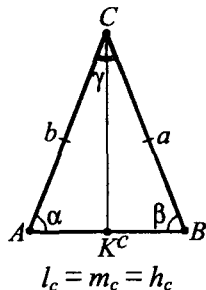
## ТЕМА 31. РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

1. **Означення.**  $AC = BC$ , трикутник  $ABC$  — рівнобедрений.  
 $a, b$  — бічні сторони,  $c$  — основа.

2. **Властивості:**

1)  $\alpha = \beta$ ;

2)  $h_c = m_c = l_c = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$ .



3. **Ознаки.**

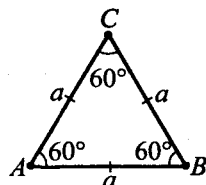
Трикутник є рівнобедреним, якщо:

- 1) кути при основі рівні;
- 2) одна з медіан є висотою або бісектрисою;
- 3) одна з висот є бісектрисою або медіаною;
- 4) одна з бісектрис є медіаною або висотою;
- 5) дві медіани (висоти, бісектриси) рівні.

4. **Рівносторонній трикутник.**

**Означення.**  $AB = BC = AC = a$ , трикутник  $ABC$  — рівносторонній.  $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ .

$$h_a = m_a = l_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



5. **Радіус вписаного й описаного кола для рівностороннього трикутника.**

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2r, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2}R.$$

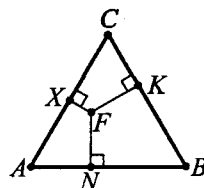
6. **Площа рівностороннього трикутника.**  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

7. Ортоцентр, центр мас, центр вписаного й описаного кіл у рівносторонньому трикутнику збігаються.

8. Усі рівносторонні трикутники подібні.

9. Сума відстаней від будь-якої точки рівностороннього трикутника, до його сторін дорівнює висоті трикутника

$$FX + FN + FK = h.$$

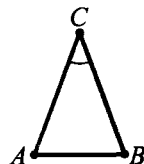


**Приклад 1.** Кут при основі рівнобедреного трикутника учетверо більший від кута при вершині. Знайти кут при вершині.

А	Б	В	Г	Д
20°	40°	15°	140°	10°

■ Нехай трикутник  $ABC$  — заданий. У ньому  $AC = BC$ ,  $\angle A = 4\angle C$ . Оскільки  $\angle A = \angle B$  і  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ , то одержимо:  $4\angle C + 4\angle C + \angle C = 180^\circ$ ;  $9\angle C = 180^\circ$ ;  $\angle C = 20^\circ$ .

Відповідь. А. ■



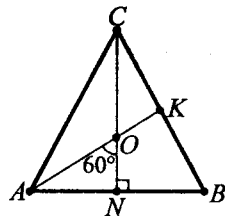
**Приклад 2.** З вершини  $A$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  з основою  $AB$  проведена медіана завдовжки 90 см. Ця медіана утворює з бісектрисою кута  $C$  кут  $60^\circ$ . Знайти в сантиметрах довжину бісектриси кута  $C$ .

■ Нехай трикутник  $ABC$  — заданий рівнобедрений трикутник з основою  $AB$ ,  $AC = CB$ ,  $AK$  — медіана,  $AK = 90$  см,  $CN$  — бісектриса кута  $C$ ,  $O$  — точка перетину  $AK$  і  $CN$ ,  $\angle AON = 60^\circ$ .

За властивістю бісектриси, проведеної до основи рівнобедреного трикутника,  $CN$  — медіана та висота. За властивістю медіан трикутника  $AO : OK = 2 : 1$ .  $OK = \frac{1}{3}AK = \frac{1}{3} \cdot 90 = 30$  (см).  $AO = 90 - 30 = 60$  (см).

У трикутнику  $AON$   $\angle ANO = 90^\circ$ , оскільки  $CN$  — висота,  $\angle AON = 60^\circ$ , тоді  $\angle OAN = 30^\circ$ . Маємо:  $ON = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30$  (см).  $CO = 2ON = 2 \cdot 30 = 60$  (см).  $CN = CO + ON$ ;  $CN = 60 + 30 = 90$  (см).

Відповідь. 90. ■



**Завдання 31.1–31.20** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**31.1.** Знайти периметр рівнобедреного трикутника зі сторонами 3 см і 7 см.

А	Б	В	Г	Д
20 см	10 см	13 см	17 см	17 см або 13 см

**31.2.** У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  кут  $C$  дорівнює  $104^\circ$ . Знайти кут  $B$ .

А	Б	В	Г	Д
$66^\circ$	$76^\circ$	$38^\circ$	$28^\circ$	$48^\circ$

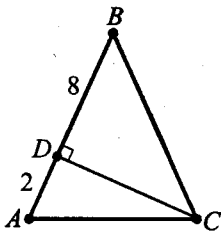
**31.3.** Знайти площу рівнобедреного трикутника, у якого бічна сторона дорівнює  $4\sqrt{2}$  см, а кут між бічними сторонами дорівнює  $30^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$8\sqrt{2}$ см <sup>2</sup>	$16\sqrt{3}$ см <sup>2</sup>	$8\sqrt{3}$ см <sup>2</sup>	16 см <sup>2</sup>	8 см <sup>2</sup>

**31.4.** У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 10 см, а висота, що проведена до основи, — 6 см. Знайти площу трикутника.

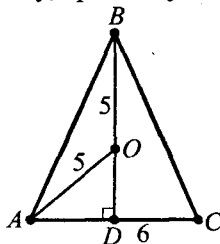
А	Б	В	Г	Д
48 см <sup>2</sup>	24 см <sup>2</sup>	96 см <sup>2</sup>	30 см <sup>2</sup>	60 см <sup>2</sup>

**31.5.** У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки 8 см і 2 см, починаючи від вершини кута між бічними сторонами. Знайти площу трикутника.



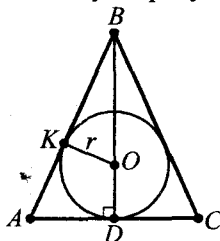
А	Б	В	Г	Д
$78 \text{ см}^2$	$64 \text{ см}^2$	$60 \text{ см}^2$	$30 \text{ см}^2$	$32 \text{ см}^2$

31.6. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 6 см, а радіус кола, описаного навколо трикутника, — 5 см. Знайти висоту, проведену до основи.



А	Б	В	Г	Д
8 см	9 см	10 см	11 см	12 см

31.7. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює  $\alpha$ , а радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює  $r$ . Визначити бічну сторону трикутника.



А	Б	В	Г	Д
$r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha$	$r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha$	$\frac{r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$	$r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha$	$\frac{r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$

31.8. Знайти площу рівностороннього трикутника зі стороною  $2\sqrt{3}$  см.

А	Б	В	Г	Д
$3 \text{ см}^2$	$\sqrt{3} \text{ см}^2$	$3\sqrt{3} \text{ см}^2$	$4\sqrt{3} \text{ см}^2$	$2\sqrt{3} \text{ см}^2$

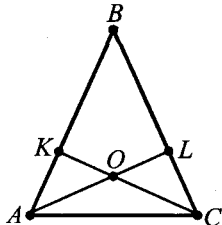
31.9. Радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, дорівнює  $4\sqrt{3}$  см. Знайти сторону трикутника.

А	Б	В	Г	Д
12 см	16 см	24 см	36 см	48 см

31.10. Сторона правильного трикутника дорівнює  $20\sqrt{3}$  см. Знайти проекцію однієї медіани на іншу.

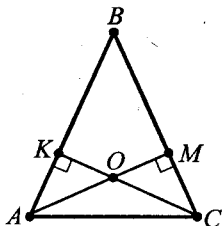
А	Б	В	Г	Д
15 см	20 см	30 см	40 см	$10\sqrt{3}$ см

31.11. У рівнобедреному трикутнику бісектриси кутів при основі утворюють при перетині кут  $52^\circ$ . Знайти кут між бічними сторонами трикутника.



А	Б	В	Г	Д
$72^\circ$	$74^\circ$	$76^\circ$	$78^\circ$	$84^\circ$

31.12.  $O$  — точка перетину висот  $AM$  і  $CK$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  з основою  $AC$ . Знайти кут  $B$ , якщо  $\angle AOC = 110^\circ$ .



А	Б	В	Г	Д
$70^\circ$	$80^\circ$	$60^\circ$	$50^\circ$	$35^\circ$

31.13. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 55 см, а висота, що проведена до основи, — 44 см. Знайти відношення відрізків, на які поділяє бічну сторону бісектриса кута при основі.

А	Б	В	Г	Д
2 : 3	3 : 4	4 : 5	5 : 6	6 : 7

31.14. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює  $8\sqrt{3}$  см. Знайти радіус кола, яке проходить через середини сторін трикутника.

А	Б	В	Г	Д
2 см	8 см	4 см	$4\sqrt{3}$ см	$2\sqrt{3}$ см.

31.15. Знайти радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 160 см а висота, проведена до неї, — 60 см.

А	Б	В	Г	Д
$26\frac{2}{3}$ см	$13\frac{1}{3}$ см	40 см	$17\frac{1}{7}$ см	$8\frac{4}{7}$ см

31.16. Знайти відстань від точки перетину медіан до центра кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з основою 160 см і бічною стороною 100 см.

А	Б	В	Г	Д
$13\frac{1}{3}$ см	$3\frac{1}{3}$ см	$23\frac{6}{7}$ см	$6\frac{2}{3}$ см	$7\frac{2}{3}$ см



31.17. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, поділяє висоту, що проведена до основи, у відношенні 10 : 3. Знайти периметр трикутника, якщо бічна сторона дорівнює 20 см.

А	Б	В	Г	Д
64 см	49 см	43 см	46 см	52 см

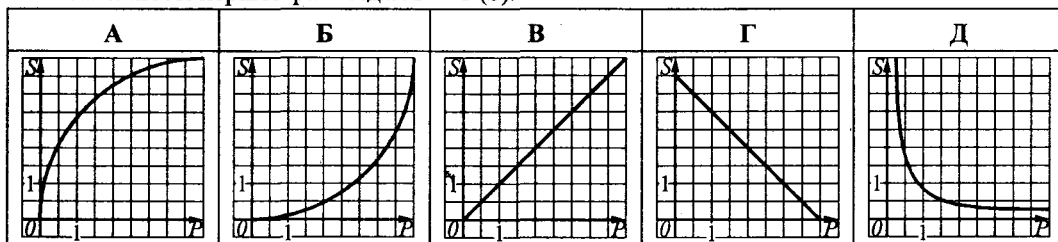
31.18. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють 16 см і 10 см. Знайти висоту трикутника, проведену до бічної сторони.

А	Б	В	Г	Д
34 см	6 см	8 см	9,6 см	4,8 см

31.19. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. За якого значення висоти, проведеної до основи, площа трикутника буде найбільшою?

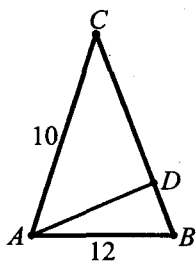
А	Б	В	Г	Д
24 см	$24\sqrt{2}$ см	$12\sqrt{2}$ см	$12\sqrt{3}$ см	$8\sqrt{3}$ см

31.20.  $S$  — площа рівностороннього трикутника. Серед наведених графіків указати графік залежності периметра  $P$  від  $S$ :  $P = P(S)$ .



Завдання 31.21–31.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

31.21. На рисунку зображено рівнобедрений трикутник  $ABC$  ( $AC = BC$ ), його висоту  $AD$  і позначено величини деяких елементів. Установити відповідність між елементами трикутника (1–4) та їхніми величинами (А–Д).



- |                         |        |
|-------------------------|--------|
| 1 $AD$                  | А 9,6  |
| 2 $S_{\triangle ABC}$   | Б 6,25 |
| 3 Радіус вписаного кола | В 3    |
| 4 Радіус описаного кола | Г 48   |
|                         | Д 32   |

31.22. Установити відповідність між заданими довжинами основ (1–4) рівнобедрених трикутників з кутами  $120^\circ$  при вершинах, протилежних до основ, та їх висотами (А–Д) до цих основ.

1 4 см

2  $8\sqrt{3}$  см

3 10 см

4  $12\sqrt{3}$  см

А 4 см

Б  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  см

В 6 см

Г 16 см

Д  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$  см

31.23. Установити відповідність між довжинами бічних сторін рівнобедрених трикутників (1–4), кут між якими дорівнює  $30^\circ$ , та площами (А–Д) цих трикутників.

1 20 см

2 24 см

3 28 см

4 32 см

А  $196 \text{ см}^2$

Б  $100 \text{ см}^2$

В  $256 \text{ см}^2$

Г  $625 \text{ см}^2$

Д  $144 \text{ см}^2$

31.24. Установити відповідність між довжинами сторін рівнобедрених трикутників (1–4) та радіусами описаних навколо них кіл (А–Д).

1 29 см, 29 см, 42 см

2 30 см, 30 см, 48 см

3 5 см, 5 см, 8 см

4 20 см, 20 см, 32 см

А 21,025 см

Б 20 см

В 25 см

Г  $\frac{25}{6}$  см

Д  $\frac{50}{3}$  см

Розв'яжіть завдання 31.25–31.37. Відповідь запишіть десятковим дробом.

31.25. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20. Знайти його основу, якщо вона на 2 більша від бічної сторони.

31.26. Кут при основі  $AB$  рівнобедреного трикутника дорівнює  $30^\circ$ . Висоти трикутника, проведені до бічних сторін, перетинаються в точці  $O$ . Знайти у градусах величину кута  $AOB$ .

31.27. У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  основа  $AC$  дорівнює 18. Через точку  $O$  — середину висоти  $BD$  — проведено промені  $AO$  і  $CO$ , які перетинають бічні сторони в точках  $M$  і  $K$ . Знайти довжину відрізка  $MK$ .

31.28. У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона відповідно дорівнюють 5 і 20. Знайти менший з відрізків, на які поділяє бічну сторону бісектриса кута при основі.

31.29. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить висоту, проведену до основи, у відношенні  $12 : 5$ , а бічна сторона дорівнює 60. Знайти периметр трикутника.

- 31.30. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 108 см, а основа — 30. Знайти радіус вписаного кола.
- 31.31. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12, а висота, що проведена до основи, — 8. Знайти радіус кола, вписаного в цей трикутник.
- 31.32. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює  $a$ , радіус вписаного кола —  $r$ . Визначити бічну сторону трикутника й обчислити її значення, якщо  $a = 6$ ,  $r = 2$ .
- 31.33. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює  $a$ , висота, що проведена до основи, —  $h$ . Визначити відстань від середини основи до бічної сторони й обчислити її значення, якщо  $a = 3$ ,  $h = 2$ .
- 31.34. Знайти у градусах кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника, якщо бісектриса кута при основі відтинає від нього трикутник подібний даному.
- 31.35. Знайти площу рівнобедреного трикутника з точністю до  $0,01 \text{ см}^2$ , якщо висота, яка проведена до бічної сторони, дорівнює 12 см, а інша висота — 9 см.
- 31.36. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює  $b$ , медіана, яка проведена до бічної сторони, дорівнює  $m$ . Визначити квадрат основи трикутника й обчислити його значення, якщо  $m = 2,5$ ;  $b = 3$ .
- 31.37. У правильному трикутнику зі стороною 6 на одній зі сторін узято точку на відстані 1 від вершини. Знайти квадрат відстані від цієї точки до центра трикутника.

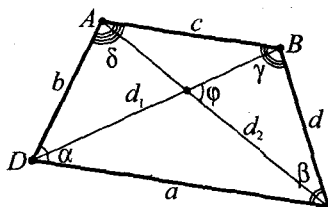
## ТЕМА 32. ЧОТИРИКУТНИКИ

Розглядатимемо лише опуклі чотирикутники.

1. Сума внутрішніх кутів.  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ .

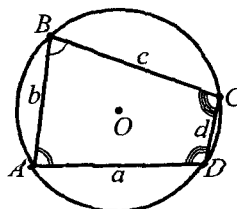
Периметр.  $P = a + b + c + d$ .

2. Площа.  $S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}$ .



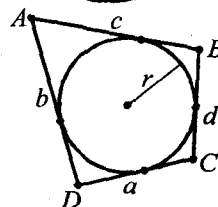
3. Чотирикутник, вписаний у коло.

Сума протилежних кутів дорівнює  $180^\circ$ :  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$ .



4. Чотирикутник, описаний навколо кола.

Суми протилежних сторін рівні:  $a + c = b + d$ .



5. Паралелограм.

$AB \parallel CD, AD \parallel BC, ABCD$  — паралелограм.

*Властивості.*

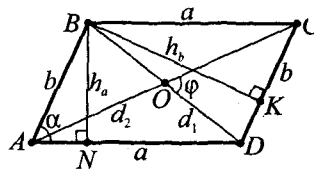
- 1) Протилежні сторони рівні:  $AB = CD = a, BC = AD = b$ ;
- 2) протилежні кути рівні:  $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ ;
- 3) Діагоналі при перетині діляться навпіл:  $AO = OC, BO = OD$ ;
- 4)  $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ .

*Ознаки паралелограма.*

Чотирикутник  $ABCD$  буде паралелограмом, якщо:

- 1)  $AB = CD$  і  $AB \parallel CD$ ;
- 2)  $AB = CD$  і  $BC = AD$ ;
- 3)  $AO = OC$  і  $BO = OD$ ;
- 4)  $\angle A = \angle C$  і  $\angle B = \angle D$ .

Площа.  $S = ah_a; S = bh_b; S = ab \sin \alpha; S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ .



6. **Ромб.**

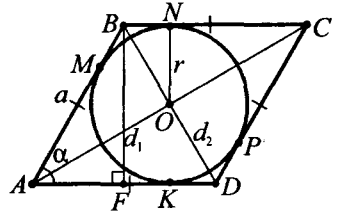
$AB = BC = CD = DA$ ,  $ABCD$  — ромб.

*Властивості.*

1)  $d_1 \perp d_2$ ;

2)  $d_1$  і  $d_2$  — бісектриси кутів ромба.

*Ознака.* Паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, є ромбом.



*Площа.*  $S = a^2 \sin \alpha$ ;  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$ .

У будь-який ромб можна вписати коло. Центр кола, вписаного в ромб, є точкою перетину його діагоналей.  $r = \frac{1}{2} h_a$ .

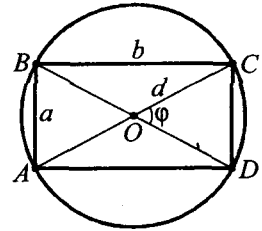
7. **Прямокутник.**

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ,  $ABCD$  — прямокутник.

*Властивості.*

1)  $AC = BD$ .

*Ознака.* Якщо діагоналі паралелограма рівні, то такий паралелограм є прямокутником.



*Площа.*  $S = ab$ ;  $S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$ .

Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло. Центром кола, описаного навколо прямокутника, є точка перетину його діагоналей.  $R = \frac{1}{2} d$ ;  $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$ .

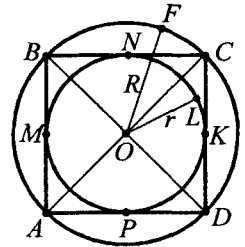
8. **Квадрат.**

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ,  $AB = BC = CD = DA$ ,  $ABCD$  — квадрат.

*Ознака.* Якщо діагоналі чотирикутника рівні та є бісектрисами його кутів, то такий чотирикутник — квадрат.

*Площа.*  $S = a^2$ ;  $S = \frac{1}{2} d^2$ .

У будь-який квадрат можна вписати коло й навколо квадрата описати коло.



Центром вписаного й описаного кіл є точка перетину діагоналей квадрата.  $r = \frac{1}{2} a$ ,

$R = \frac{1}{2} d$ ,  $R = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ .

9. **Трапеція.**

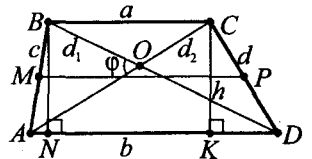
$BC \parallel AD$ ,  $AB$  і  $CD$  — не паралельні.  $ABCD$  — трапеція.

$BN \perp AD$ ,  $CK \perp AD$ ,  $BN$ ,  $CK$  — висоти.

Якщо один з кутів дорівнює  $90^\circ$ , то трапеція прямокутна.

Якщо  $AB = CD$ , то трапеція рівнобічна.

У рівнобічній трапеції кути при кожній основі рівні.



**Ознака рівнобічної трапеції.** Якщо кути при кожній основі рівні, то така трапеція є рівнобічною.

**Середня лінія.**  $AM = MB, CP = PD, MP$  — середня лінія трапеції  $ABCD$ .

Середня лінія паралельна основам і дорівнює їх півсумі:  $MP = \frac{1}{2}(BC + AD)$ .

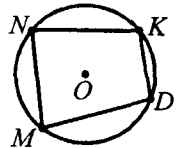
**Площа.**  $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ .

**Приклад 1.** Знайти кути чотирикутника, якщо відомо, що три з них, взяті послідовно, відносяться як 5 : 3 : 4 і навколо цього чотирикутника можна описати коло.

А	Б	В	Г	Д
120°, 80°, 60°, 100°	80°, 20°, 130°, 130°	100°, 60°, 80°, 120°	80°, 120°, 110°, 50°	110°, 90°, 80°, 80°

■ Нехай коло ( $O; R$ ) описане навколо чотирикутника  $MNKD$ .  $\angle M : \angle N : \angle K = 5 : 3 : 4$ . Оскільки навколо чотирикутника описане коло, то  $\angle M + \angle K = 180^\circ, \angle N + \angle D = 180^\circ$ .

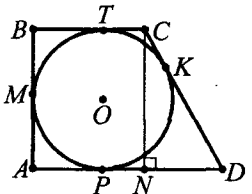
Одержимо:  $\angle M = 5x^\circ, \angle N = 3x^\circ, \angle K = 4x^\circ$ .  $5x + 4x = 180; 9x = 180; x = 20$ . Тоді  $\angle M = 5 \cdot 20 = 100^\circ, \angle N = 3 \cdot 20 = 60^\circ, \angle K = 4 \cdot 20 = 80^\circ$ .  $\angle D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .



Відповідь. В. ■

**Приклад 2.** У прямокутній трапеції менша основа дорівнює 21 см. Обчислити у квадратних сантиметрах площу трапеції, якщо довжина кола, вписаного в неї, дорівнює  $24\pi$  см.

■ Нехай  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) — задана прямокутна трапеція, у яку вписано коло ( $O; r$ ) завдовжки  $24\pi$  см,  $BC = 21$  см. Тоді  $2\pi r = 24\pi, r = 12$  (см). Проведемо висоту  $CN$ . Оскільки трапеція прямокутна, то  $CN = AB = 2r = 24\pi : \pi$ . За властивістю сторін описаного чотирикутника  $BC + AD = AB + CD; 21 + AD = 24 + CD; AD - CD = 3$ . Нехай  $CD = x$  см. Тоді  $AD = (x + 3)$  см.  $ABCN$  — прямокутник, тому  $AN = BC = 21$  (см). Оскільки  $AD = AN + ND$ , то  $ND = AD - AN = (x + 3) - 21 = (x - 18)$  см. З трикутника  $CND$  ( $\angle N = 90^\circ$ ):  $CD^2 = CN^2 + ND^2; x^2 = 24^2 + (x - 18)^2; x^2 = 576 + x^2 - 36x + 324; 36x = 900; x = 25$ . Отже,  $CD = 25$  см.



$ND = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = 7. AD = 21 + 7 = 28$  (см).  $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$ .

$S_{ABCD} = \frac{21+28}{2} \cdot 24 = 588$  (см<sup>2</sup>).

Відповідь. 588. ■

**Завдання 32.1–32.24** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**32.1.** Сума двох кутів паралелограма дорівнює  $130^\circ$ . Знайти найбільший кут паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
140°	120°	105°	115°	125°

32.2. Периметр паралелограма дорівнює 84 см, а сума двох його сторін — 58 см. Знайти меншу сторону паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
11 см	29 см	17 см	23 см	13 см

32.3. Бісектриса гострого кута паралелограма поділяє сторону на відрізки завдовжки 7 см і 10 см, починаючи від вершини тупого кута. Знайти периметр паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
48 см	54 см	96 см	68 см	56 см

32.4. У чотирикутнику діагоналі дорівнюють 8 см і 5 см. Обчислити периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.

А	Б	В	Г	Д
40 см	13 см	26 см	3 см	20 см

32.5. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 8 см. Знайти площу прямокутника, якщо площа круга, описаного навколо нього, дорівнює  $25\pi$  см<sup>2</sup>.

А	Б	В	Г	Д
80 см <sup>2</sup>	48 см <sup>2</sup>	40 см <sup>2</sup>	24 см <sup>2</sup>	200 см <sup>2</sup>

32.6. У прямокутнику  $ABCD$   $O$  — точка перетину діагоналей,  $\angle BOC = 108^\circ$ . Знайти  $\angle ABD$ .

А	Б	В	Г	Д
72°	45°	30°	54°	18°

32.7. Діагональ ромба утворює з однією зі сторін кут, що дорівнює 54°. Знайти менший кут ромба.

А	Б	В	Г	Д
36°	26°	72°	62°	27°

32.8. Одна з діагоналей ромба дорівнює 30 см. Знайти іншу діагональ ромба, якщо його периметр дорівнює 68 см.

А	Б	В	Г	Д
20 см	24 см	30 см	16 см	19 см

32.9. Сторона ромба дорівнює 6 см, а його площа — 18 см<sup>2</sup>. Знайти найбільший кут ромба.

А	Б	В	Г	Д
105°	120°	130°	135°	150°

32.10. Сторони паралелограма дорівнюють 18 см і 30 см, а висота, яка проведена до більшої сторони, — 6 см. Знайти іншу висоту паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
10 см	20 см	15 см	3,6 см	18 см

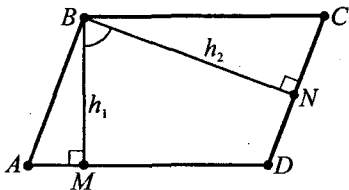
32.11. Висота рівнобічної трапеції, яка проведена з вершини тупого кута, поділяє основу на відрізки завдовжки 5 см і 11 см. Знайти периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

А	Б	В	Г	Д
50 см	43 см	48 см	47 см	53 см

32.12. Дві менші сторони прямокутної трапеції дорівнюють  $a$ , а один з її кутів —  $45^\circ$ . Визначити площу трапеції.

А	Б	В	Г	Д
$a^2$	$\frac{5}{2}a^2$	$2a^2$	$3a^2$	$\frac{3}{2}a^2$

32.13. Висоти паралелограма дорівнюють  $h_1$  і  $h_2$ , а кут між ними —  $\alpha$ . Визначити площу паралелограма.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{h_1 h_2}{\cos \alpha}$	$\frac{h_1 h_2}{\sin \alpha}$	$h_1 h_2 \sin \alpha$	$h_1 h_2 \cos \alpha$	$\frac{h_1 h_2}{\sin^2 \alpha}$

32.14. Діагоналі прямокутника утворюють кут  $50^\circ$ . Знайти кут між діагоналлю прямокутника та бісектрисою кута, проведеними з однієї вершини.

А	Б	В	Г	Д
$50^\circ$	$30^\circ$	$25^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$

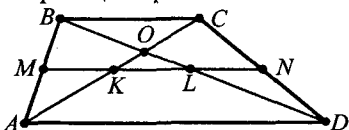
32.15. Точка  $O$ , яка є перетином діагоналей трапеції  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ), ділить діагональ  $AC$  на відрізки  $AO = 8$  см і  $OC = 4$  см. Знайти основу  $BC$ , якщо  $AD = 14$  см.

А	Б	В	Г	Д
5 см	6 см	7 см	8 см	4 см

32.16. Менша основа трапеції дорівнює 20 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 5 см і 6 см. Знайти площу трапеції.

А	Б	В	Г	Д
$110 \text{ см}^2$	$363 \text{ см}^2$	$121 \text{ см}^2$	$242 \text{ см}^2$	$484 \text{ см}^2$

32.17. Відстань між серединами діагоналей трапеції дорівнює 7 см, а менша її основа — 6 см. Знайти середню лінію трапеції.



А	Б	В	Г	Д
9 см	6,5 см	12 см	26 см	13 см

32.18. У рівнобічну трапецію вписане коло. Знайти у квадратних сантиметрах площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 2 см і 8 см.

А	Б	В	Г	Д
$40 \text{ см}^2$	$5 \text{ см}^2$	$20 \text{ см}^2$	$16 \text{ см}^2$	Інша відповідь



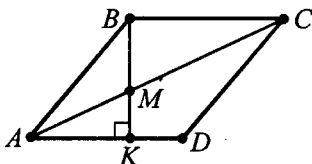
32.19. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні. Знайти площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 8 см і 20 см.

А	Б	В	Г	Д
196 см <sup>2</sup>	392 см <sup>2</sup>	784 см <sup>2</sup>	588 см <sup>2</sup>	98 см <sup>2</sup>

32.20. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює  $d$  і поділяє його гострий кут на кути  $\alpha$  і  $\beta$ . Визначити площу паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
$d^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$	$\frac{d^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin^3(\alpha + \beta)}$	$\frac{d^2 \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$	$\frac{d^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$	$\frac{d^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$

32.21. У ромбі  $ABCD$  більша діагональ  $AC$  поділяє висоту  $BK$  на відрізки  $BM = 5$  см і  $MK = 3$  см. Знайти площу ромба.



А	Б	В	Г	Д
40 см <sup>2</sup>	80 см <sup>2</sup>	120 см <sup>2</sup>	140 см <sup>2</sup>	20 см <sup>2</sup>

32.22. Діагональ трапеції поділяє її на два подібні трикутники. Знайти цю діагональ, якщо основи трапеції дорівнюють 50 см і 72 см.

А	Б	В	Г	Д
90 см	30,5 см	30 см	61 см	60 см

32.23. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута й утворює з більшою основою кут  $30^\circ$ . Знайти периметр трапеції, якщо більша основа дорівнює 8 см.

А	Б	В	Г	Д
18 см	24 см	16 см	20 см	32 см

32.24. Периметр паралелограма більший від однієї з його сторін на 23 см і більший на 19 см від іншої його сторони. Знайти периметр паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
42 см	28 см	34 см	36 см	32 см

Завдання 32.25–32.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

32.25. Установити відповідність між фігурами (1–4) та їхніми характерними властивостями (А–Д).

- |   |                                    |   |   |
|---|------------------------------------|---|---|
| 1 | Описаний навколо кола чотирикутник | А | Сума протилежних кутів дорівнює $180^\circ$       |
| 2 | Вписаний у коло чотирикутник       | Б | Діагоналі рівні                                   |
| 3 | Паралелограм                       | В | Суми протилежних сторін рівні                     |
| 4 | Ромб                               | Г | Сума кутів при одній стороні дорівнює $180^\circ$ |
|   |                                    | Д | Діагоналі є бісектрисами кутів                    |

**32.26.** Діагональ ромба утворює зі стороною кут  $60^\circ$ . Установити відповідність між довжинами сторін (1–4) ромба і площами (А–Д) прямокутників з вершинами на серединах сторін ромба.

- |         |                                 |
|---------|---------------------------------|
| 1 20 см | А $441\sqrt{3}$ см <sup>2</sup> |
| 2 36 см | Б $100\sqrt{3}$ см <sup>2</sup> |
| 3 42 см | В $529\sqrt{3}$ см <sup>2</sup> |
| 4 50 см | Г $625\sqrt{3}$ см <sup>2</sup> |
|         | Д $324\sqrt{3}$ см <sup>2</sup> |

**32.27.** Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 5 см. Установити відповідність між величинами гострих кутів (1–4) паралелограмів і їх площами (А–Д).

- |              |  |
|--------------|--|
| 1 $30^\circ$ | А $30\sqrt{3}$ см <sup>2</sup>           |
| 2 $45^\circ$ | Б $30$ см <sup>2</sup>                   |
| 3 $60^\circ$ | В $15\sqrt{3}$ см <sup>2</sup>           |
| 4 $80^\circ$ | Г $30\sqrt{2}$ см <sup>2</sup>           |
|              | Д $60\sin\frac{4\pi}{9}$ см <sup>2</sup> |

**32.28.** У рівнобічних трапеціях діагональ є бісектрисою гострого кута й утворює з більшою основою кут  $30^\circ$ . Установити відповідність між довжинами більших основ (1–4) та периметрами трапецій (А–Д).

- |         |         |
|---------|---------|
| 1 4 см  | А 20 см |
| 2 8 см  | Б 60 см |
| 3 24 см | В 10 см |
| 4 12 см | Г 30 см |
|         | Д 50 см |

**Розв'яжіть завдання 32.29–32.45. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

**32.29.** Перпендикуляр, проведений з вершини прямокутника на діагональ, дорівнює 12 і поділяє діагональ на відрізки, різниця яких дорівнює 7. Знайти площу прямокутника.

**32.30.** Одна з діагоналей паралелограма дорівнює  $6\sqrt{6}$  і утворює зі стороною паралелограма кут  $60^\circ$ . Знайти іншу діагональ, якщо вона утворює з тією ж стороною кут  $45^\circ$ .

**32.31.** Одна з діагоналей паралелограма, яка дорівнює  $3\sqrt{6}$ , утворює з основою паралелограма кут  $60^\circ$ . Обчислити довжину другої діагоналі, якщо вона утворює з цією ж основою кут  $45^\circ$ .

**32.32.** Висоти паралелограма дорівнюють 4 і 6, а його периметр — 40. Знайти у градусах гострий кут паралелограма.

**32.33.** Одна сторона паралелограма на 2 більша за іншу, а його діагоналі дорівнюють 8 і 14. Знайти периметр паралелограма.

**32.34.** Діагоналі ромба відносяться як 3 : 4. Знайти висоту ромба, якщо його периметр дорівнює 80.

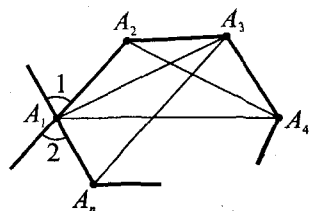
- 32.35. Сума довжин діагоналей ромба дорівнює  $l$ , а площа ромба —  $S$ . Визначити сторону ромба й обчислити її значення, якщо  $l = 5$ ,  $S = 4$ .
- 32.36. Визначити площу паралелограма за його висотами  $h_1$  і  $h_2$  та периметром  $P$  й обчислити її значення, якщо  $h_1 = 3$ ,  $h_2 = 7$ ,  $P = 20$ .
- 32.37. Основи трапеції дорівнюють 10 і 24, а бічні сторони — 15 і 13. Знайти площу трапеції.
- 32.38. У рівнобічну трапецію, верхня основа якої удвічі менша від її висоти, вписане коло, радіус якого дорівнює 3 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу трапеції.
- 32.39. Основи трапеції дорівнюють 5 і 15, а діагоналі — 12 і 16. Знайти площу трапеції.
- 32.40. Навколо трапеції описане коло, діаметром якого є більша основа. Обчислити площу трапеції у квадратних сантиметрах, якщо її діагональ і висота відповідно дорівнюють 5 см і 3 см.
- 32.41. Площі трикутників, утворених основами трапеції та відрізками діагоналей дорівнюють  $S_1$  і  $S_2$ . Визначити площу трапеції й обчислити її значення, якщо  $S_1 = 4$ ,  $S_2 = 1$ .
- 32.42. Квадрат зі стороною  $a$  повернуто навколо свого центра на  $45^\circ$ . Знайти площу спільної частини цих квадратів й обчислити її значення з точністю до 0,01, якщо  $a = 1$ .
- 32.43. Знайти квадрат площі паралелограма, якщо його більша діагональ дорівнює  $2\sqrt{7}$ , а висоти дорівнюють  $\sqrt{3}$  і  $2\sqrt{3}$ .
- 32.44. Висота ромба дорівнює 24, а менша діагональ — 30. Знайти більшу діагональ ромба.
- 32.45. Знайти площу паралелограма з точністю до 0,01 см<sup>2</sup>, якщо його більша діагональ дорівнює 5, а висоти дорівнюють 2 і 3.

### ТЕМА 33. МНОГОКУТНИКИ

1.  $A_1A_2\dots A_n$  — многокутник.

$$P_{A_1A_2\dots A_n} = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_1.$$

Кути 1 і 2 — зовнішні кути при вершині  $A_1$ .



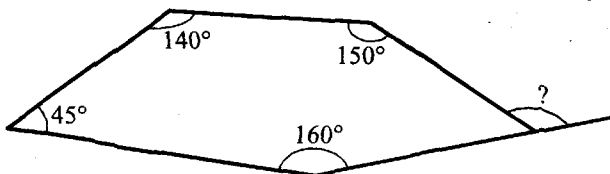
2. Сума кутів.  $S_n = 180^\circ (n - 2)$ .
3. Сума зовнішніх кутів опуклого  $n$ -кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює  $360^\circ$ .
4. Правильний многокутник — многокутник у якого всі сторони й усі кути рівні. Величина кута  $\alpha_n$  правильного  $n$ -кутника:  $\alpha_n = \frac{180(n-2)}{n}$ .

5. Навколо будь-якого правильного многокутника можна описати коло; у будь-який правильний многокутник можна вписати коло, до того ж центри вписаного й описаного кіл збігаються.  $R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{r}{\cos \frac{\pi}{n}}$ ,  $R = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$ ,  $r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$ , де  $R$  — радіус описаного

кола,  $r$  — радіус вписаного кола,  $a$  — сторона правильного многокутника.

6. Правильні  $n$ -кутники подібні. Відношення їхніх периметрів, радіусів вписаних і описаних кіл дорівнюють відношенню їхніх сторін, а відношення їх площ — відношенню квадратів сторін.

**Приклад 1.** Знайти зовнішній кут многокутника, зображеного на рисунку.



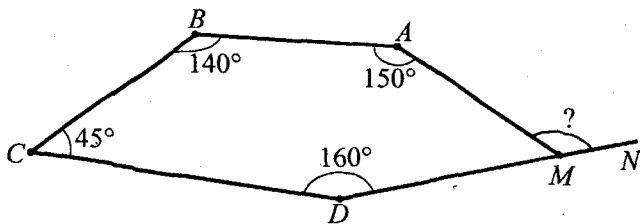
А	Б	В	Г	Д
150°	45°	160°	140°	135°

■ Сума кутів п'ятикутника дорівнює:  $180^\circ \cdot 5 - 180^\circ \cdot 2 = 540^\circ$ .

$$\angle AMD = 540^\circ - (150^\circ + 140^\circ + 45^\circ + 160^\circ) = 45^\circ.$$

$$\angle AMN = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Відповідь. Д. ■



**Приклад 2.** Скільки сторін має многокутник, якщо в ньому можна провести 20 діагоналей?

А	Б	В	Г	Д
10	15	5	8	6

■ У  $n$ -кутнику можна провести  $\frac{n(n-3)}{2}$  діагоналей. Маємо:  $\frac{n(n-3)}{2} = 20$ ;

$$n^2 - 3n - 40 = 0; n_1 = -5 \text{ — не задовольняє умову задачі, } n_2 = 8.$$

Відповідь. Г. ■

**Приклад 3.** Скільки вершин у правильного многокутника, якщо його внутрішній кут відноситься до зовнішнього кута як 5 : 2.

■ Нехай внутрішній кут дорівнює  $5x^\circ$ , а зовнішній —  $2x^\circ$ . Маємо:  $5x + 2x = 180$ ;  $7x = 180$ ;  $x = \frac{180}{7}$ . Отже, зовнішній кут многокутника дорівнює  $2 \cdot \frac{180^\circ}{7} = \frac{360^\circ}{7}$ . Сума зовнішніх кутів многокутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює  $360^\circ$ , а кожен зовнішній кут —  $\frac{360^\circ}{n}$ . Маємо:  $\frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{7}$ ;  $n = 7$ . Отже, у многокутнику є 7 вершин.

Відповідь. 7. ■

**Завдання 33.1–33.20** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**33.1.** Скільки всього діагоналей має десятикутник?

А	Б	В	Г	Д
10	50	75	70	35

**33.2.** Чому дорівнює сума внутрішніх кутів опуклого дванадцятикутника?

А	Б	В	Г	Д
$1800^\circ$	$1980^\circ$	$2160^\circ$	$1620^\circ$	$2520^\circ$

**33.3.** Скільки вершин має опуклий многокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює  $900^\circ$ ?

А	Б	В	Г	Д
П'ять	шість	сім	вісім	дев'ять

**33.4.** Якщо в опуклому многокутнику всі кути гострі, то він...

А	Б	В	Г	Д
трикутник	чотирикутник	п'ятикутник	трикутник або чотирикутник	стокутник

**33.5.** Чому дорівнює внутрішній кут правильного восьмикутника?

А	Б	В	Г	Д
$36^\circ$	$45^\circ$	$54^\circ$	$135^\circ$	$126^\circ$

**33.6.** Скільки сторін має правильний многокутник, якщо його внутрішній кут дорівнює  $156^\circ$ ?

А	Б	В	Г	Д
13	14	15	16	17

**33.7.** Скільки вершин має правильний многокутник, якщо його зовнішній кут дорівнює  $20^\circ$ ?

А	Б	В	Г	Д
9	12	16	18	20

33.8. Якщо у правильного багатокутника всі діагоналі рівні, то він...

А	Б	В	Г	Д
чотирикутник	п'ятикутник	шестикутник	чотирикутник або п'ятикутник	чотирикутник або шестикутник

33.9. Кути п'ятикутника пропорційні до чисел 3, 5, 5, 6 і 8. Знайти найбільший кут п'ятикутника.

А	Б	В	Г	Д
$160^\circ$	$150^\circ$	$140^\circ$	$130^\circ$	$155^\circ$

33.10. Скільки діагоналей має багатокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює  $1620^\circ$ ?

А	Б	В	Г	Д
35	54	65	55	44

33.11. Сторона правильного шестикутника дорівнює 10 см. Знайти його найбільшу діагональ.

А	Б	В	Г	Д
$10\sqrt{3}$ см	$20\sqrt{3}$ см	10 см	40 см	20 см

33.12. Сторона правильного шестикутника дорівнює  $a$ . Визначити меншу діагональ.

А	Б	В	Г	Д
$2a\sqrt{3}$	$a$	$2a\sqrt{2}$	$a\sqrt{3}$	$2a$

33.13. Сторона правильного шестикутника дорівнює 2 см. Знайти його площу.

А	Б	В	Г	Д
$6\sqrt{3}$ см <sup>2</sup>	$12\sqrt{3}$ см <sup>2</sup>	$3\sqrt{3}$ см <sup>2</sup>	32 см <sup>2</sup>	64 см <sup>2</sup>

33.14. Знайти периметр правильного шестикутника, якщо довжина кола, описаного навколо нього, дорівнює  $18\pi$  см.

А	Б	В	Г	Д
108 см	54 см	27 см	$27\sqrt{3}$ см	$54\sqrt{3}$ см

33.15. Знайти меншу діагональ шестикутника, якщо більша його діагональ дорівнює  $2\sqrt{3}$  см.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ см	$\sqrt{3}$ см	3 см	2 см	1 см

33.16. Радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, дорівнює  $8\sqrt{3}$  см. Знайти периметр шестикутника.

А	Б	В	Г	Д
24 см	48 см	96 см	192 см	72 см

33.17. Чому дорівнює найбільший кут між двома діагоналями, проведеними з однієї вершини правильного шестикутника?

А	Б	В	Г	Д
$45^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$

**33.18.** Скільки сторін має опуклий багатокутник, у якого сума внутрішніх кутів дорівнює сумі його зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині?

А	Б	В	Г	Д
Три	чотири	п'ять	шість	вісім

**33.19.** Скільки сторін має опуклий багатокутник, якщо сума його усіх внутрішніх кутів і усіх зовнішніх дорівнює  $2520^\circ$ ?

А	Б	В	Г	Д
10	11	12	13	14

**33.20.** Скільки вершин має правильний багатокутник, у якого внутрішній кут у 8 разів більший від зовнішнього?

А	Б	В	Г	Д
12	14	16	18	20

**Завдання 33.21–33.23 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).**

**33.21.** Установити відповідність між кількістю кутів (1–4) багатокутника та кількістю його діагоналей (А–Д).

1 12	А 14
2 15	Б 5
3 7	В 54
4 5	Г 20
	Д 90

**33.22.** Установити відповідність між величиною внутрішнього кута (1–4) правильного багатокутника та кількістю його сторін (А–Д).

1 $156^\circ$	А 9
2 $108^\circ$	Б 12
3 $150^\circ$	В 5
4 $140^\circ$	Г 7
	Д 15

**33.23.** Сторона правильного багатокутника дорівнює 2 см. Установити відповідність між кількістю сторін (1–4) цього багатокутника та його площею (А–Д).

1 6	А $12\text{ctg}15^\circ \text{ см}^2$
2 9	Б $6\sqrt{3} \text{ см}^2$
3 12	В $9\text{ctg}20^\circ \text{ см}^2$
4 15	Г $12\text{ctg}12^\circ \text{ см}^2$
	Д $15\text{ctg}12^\circ \text{ см}^2$

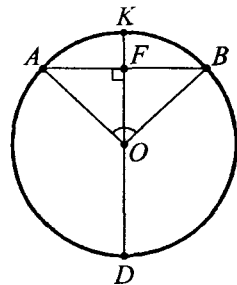
**Розв'яжіть завдання 33.24–33.34. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

- 33.24.** Сума внутрішніх кутів многокутника удвічі більша від суми зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині. Знайти число сторін многокутника.
- 33.25.** Кожний із трьох внутрішніх кутів многокутника дорівнює  $80^\circ$ , а кожний з решти кутів —  $150^\circ$ . Скільки найменше сторін може мати многокутник?
- 33.26.** Три кути многокутника прямі, а решта дорівнюють по  $150^\circ$ . Скільки найменше вершин може мати многокутник?
- 33.27.** На скільки градусів збільшиться сума внутрішніх кутів многокутника, якщо число його сторін збільшити на 5?
- 33.28.** Внутрішній кут правильного многокутника на  $144^\circ$  більший від зовнішнього. Скільки сторін має многокутник?
- 33.29.** Радіус кола, описаного навколо правильного восьмикутника, дорівнює  $4\sqrt{2}$ . Знайти найменшу діагональ восьмикутника.
- 33.30.** Менша діагональ правильного шестикутника дорівнює  $\sqrt{3}$ . Визначити більшу його діагональ.
- 33.31.**  $R$  — радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника. Визначити радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, якщо  $R = \sqrt{3}$ .
- 33.32.** Під яким кутом (у градусах) перетинаються дві діагоналі правильного п'ятикутника, проведені з різних вершин?
- 33.33.** За стороною  $a$  правильного дванадцятикутника визначити його апофему (перпендикуляр, опущений з центра до сторони), якщо  $a = 2 - \sqrt{3}$ .
- 33.34.** Виразити сторону  $a$  правильного дванадцятикутника через радіус  $R$  описаного кола, й обчислити її довжину, якщо  $R = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ .



## ТЕМА 34. КОЛО, КРУГ ТА ЇХ ЕЛЕМЕНТИ

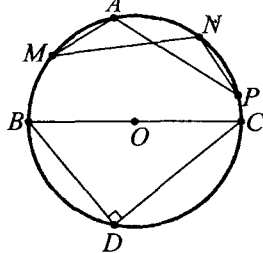
1. **Властивість хорди і діаметра.** Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл. Якщо  $DK \perp AB$ , то  $AF = FB$ . Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить дугу, яку вона стягує, навпіл: якщо  $DK \perp AB$ , то  $\cup AK = \cup KB$ .



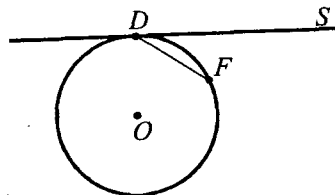
Рівні дуги стягуються рівними хордами, а рівні хорди стягують рівні дуги.

Дуги, які лежать між паралельними хордами, рівні.

2. **Центральний кут.** Центральним є кут з вершиною в центрі кола. Кут  $AOB$  — центральний, він спирається на дугу  $AB$ . Кут і дуга мають однакові градусні міри.
3. **Вписаний кут.** Кут  $PNM$  — вписаний у коло. Вписаний у коло кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається:  $\angle PNM = \frac{1}{2} \cup PDM$ . Вписані кути, які спираються на одну й ту ж дугу, рівні:  $\angle PNM = \angle PAM$ . Вписані кути, які спираються на діаметр, прямі:  $\angle BDC = 90^\circ$ .



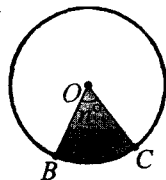
4. **Кут між дотичною і хордою,** проведеною через точку дотику, вимірюється половиною дуги, яка лежить між його сторонами:  $\angle SDF = \frac{1}{2} \cup DF$ .



5. **Довжина кола:**  $C = \pi d$ ,  $C = 2\pi r$ . Довжина дуги  $l_n = \frac{\pi R}{180} \cdot n$ , де  $n$  — градусна міра відповідного центрального кута.

6. **Площа круга:**  $S = \pi r^2$ ,  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ .

7. **Площа кругового сектора**  $S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$ , де  $n$  — градусна міра відповідного центрального кута.



**Приклад 1.** Знайти площу частини круга, яка лежить поза вписаним у коло радіуса  $R$  правильним шестикутником.

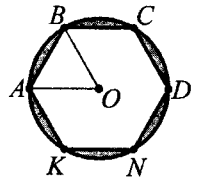
А	Б	В	Г	Д
$\pi R^2 + 1,5\pi^2 \sqrt{3}$	$2\pi R^2 - 1,5\pi^2 \sqrt{3}$	$\frac{2\pi R^2 + 3\pi^2 \sqrt{3}}{12}$	$\frac{2\pi R^2 - 3\pi^2 \sqrt{3}}{12}$	$\pi R^2 - 1,5\pi^2 \sqrt{3}$

■ Шукана площа є різницею між площею круга і шестикутника.

Знайдемо їх площі:  $S_{кр.} = \pi R^2$ ;  $S_{шест.} = 6S_{\Delta AOB} = 6 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = 1,5R^2 \sqrt{3}$ .

Шукана площа дорівнюватиме:  $S = \pi R^2 - 1,5R^2 \sqrt{3}$ .

Відповідь. Д. ■



**Приклад 2.** Сторона правильного трикутника дорівнює  $a$ . З його центра радіусом, утричі меншим від сторони, проведено коло. Знайти площу частини трикутника, розміщену поза кругом. У відповідь записати значення  $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{S}$ , якщо  $a = 3$ .

■ Нехай  $ABC$  — рівносторонній трикутник зі стороною  $AB = a$  і центром  $O$ . Знайдемо площу фігури  $MFDC$ .

У прямокутному трикутнику  $ONM$  ( $\angle N = 90^\circ$ )  $ON = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ .

$OM = \frac{1}{3}a$ , звідки  $\sin \angle OMN = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\angle OMN = 60^\circ$ . Аналогічно

$\angle ODK = 60^\circ$ .  $\angle MCD = 60^\circ$  як кут рівностороннього трикутника.

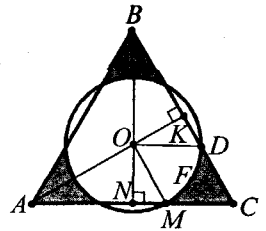
Маємо:  $\angle ODK = \angle MCD = 60^\circ$ , а вони є відповідними при прямих  $OD$  і  $MC$  та січній  $DC$ . Отже,  $OD \parallel MC$ , аналогічно  $OM \parallel DC$ .  $OM = OD = r$ . Тому  $MODC$  — ромб.  $\angle MOD = \angle MCD = 60^\circ$ .

$$S_{MFDC} = S_{OMCD} - S_{сект. MOD}. \quad S_{OMCD} = MC \cdot DC \cdot \sin \angle C = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{18}. \quad S_{сект. MOD} = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot 60}{9 \cdot 360} = \frac{\pi a^2}{54}. \quad S_{MFDC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{18} - \frac{\pi a^2}{54} = \frac{3a^2 \sqrt{3} - \pi a^2}{54}.$$

$S = 3 \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3} - \pi a^2}{54} = \frac{a^2}{18} (3\sqrt{3} - \pi)$ . У відповідь необхідно записати  $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{S}$ . Тоді одержи-

мо:  $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{\frac{a^2}{18} (3\sqrt{3} - \pi)} = \frac{18}{a^2}$ . Якщо  $a = 3$ , то  $\frac{18}{a^2} = \frac{18}{9} = 2$ .

Відповідь. 2. ■



**Завдання 34.1–34.20** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**34.1.** Знайти довжину кола, якщо його діаметр дорівнює 20 см.

А	Б	В	Г	Д
10π см	40π см	20π см	100π см	50π см

**34.2.** Знайти радіус кола, якщо довжина кола дорівнює 24π см.

А	Б	В	Г	Д
4π см	12 см	24 см	48 см	96 см

34.3. Знайти довжину дуги кола, радіус якого дорівнює 10 см, якщо її кутова величина дорівнює  $30^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{10}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{6}{5}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$

34.4. Знайти радіус кола, в якого кутова величина дуги завдовжки  $\pi$  см дорівнює  $45^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
6 см	3 см	8 см	2 см	4 см

34.5. Яка кутова величина дуги завдовжки  $\frac{\pi}{2}$  см у колі радіуса 3 см?

А	Б	В	Г	Д
$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$

34.6. Знайти площу круга, у який вписано трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см.

А	Б	В	Г	Д
$10\pi \text{ см}^2$	$36\pi \text{ см}^2$	$64\pi \text{ см}^2$	$25\pi \text{ см}^2$	$480\pi \text{ см}^2$

34.7. Знайти діаметр круга, площа якого дорівнює  $\pi \text{ см}^2$ .

А	Б	В	Г	Д
2 см	4 см	3 см	5 см	6 см

34.8. Знайти площу кругового сектора радіуса 3 см з центральним кутом  $120^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$2\pi \text{ см}^2$	$3\pi \text{ см}^2$	$4\pi \text{ см}^2$	$5\pi \text{ см}^2$	$6\pi \text{ см}^2$

34.9. Площа кругового сектора радіуса 6 см дорівнює  $5\pi \text{ см}^2$ . Знайти кутову величину дуги.

А	Б	В	Г	Д
$30^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$100^\circ$

34.10. При збільшенні круга його площа збільшилась у 9 разів. У скільки разів збільшилась довжина кола цього круга?

А	Б	В	Г	Д
1,5	27	9	2	3

34.11. З точки кола проведено дві перпендикулярні хорди, довжини яких дорівнюють 12 і 16. Знайти довжину кола.

А	Б	В	Г	Д
$20\pi$	$40\pi$	$50\pi$	$60\pi$	$35\pi$

34.12. Площа кругового сектора становить 15% площі круга. Яка величина центрального кута сектора?

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	54°	15°	20°

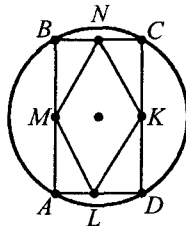
34.13. Коло, радіус якого дорівнює 9, розігнуто в дугу, радіус кола якої дорівнює 24. Знайти центральний кут, який стягує утворену дугу.

А	Б	В	Г	Д
100°	120°	135°	150°	180°

34.14. Точки  $A, B$  і  $C$  ділять коло на дуги у відношенні 2 : 3 : 4. Знайти найбільший кут трикутника  $ABC$ .

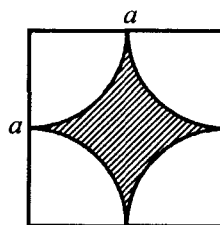
А	Б	В	Г	Д
160°	80°	120°	100°	70°

34.15. У коло, довжина якого дорівнює 6π см, вписано прямокутник  $ABCD$ .  $M, N, K$  і  $L$  — середини сторін прямокутника. Чому дорівнює периметр чотирикутника  $MNKL$ ?



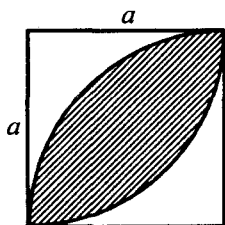
А	Б	В	Г	Д
6 см	9 см	12 см	14 см	18 см

34.16. Знайти площу заштрихованої на рисунку частини квадрата зі стороною  $a$ .



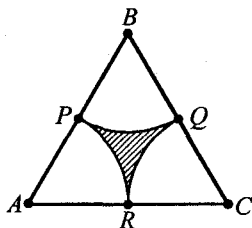
А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi-2}{2}a^2$	$\frac{\pi-3}{3}a^2$	$\frac{3-\pi}{3}a^2$	$\frac{4-\pi}{4}a^2$	$\frac{8-\pi}{8}a^2$

34.17. На рисунку зображено квадрат зі стороною 1 і дуги кіл радіуса 1. Знайти площу заштрихованої частини.



А	Б	В	Г	Д
$\pi + 1$	$\pi - 2$	$\frac{\pi}{2} + 1$	$\pi - 1$	$\frac{\pi - 1}{2}$

34.18. Довжина сторони правильного трикутника  $ABC$  дорівнює 6. Точки  $P$ ,  $Q$  і  $R$  — середини його сторін.  $PR$ ,  $PQ$  і  $QR$  — дуги кіл з центрами відповідно у точках  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Знайти площу криволінійного трикутника  $PQR$ .



А	Б	В	Г	Д
1	2	$\frac{\pi}{2} - 1$	$6(\pi - 3)$	$9\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$

34.19. Три кола, радіуси яких дорівнюють 2, 3 і 10, попарно дотикаються зовні. Знайти радіус кола, яке вписане в трикутник, утворений центрами цих кіл.

А	Б	В	Г	Д
3,5	3	2,5	2	1,5

34.20.  $l(x)$  — довжина хорди, проведеної на відстані  $x$  від центра кола. Який із наведених графіків може бути графіком функції  $l = l(x)$ ?

А	Б	В	Г	Д

**Завдання 34.21–34.23 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).**

**34.21.** З точки кола проведено дві перпендикулярні хорди  $a$  та  $b$ . Установити відповідність між довжинами цих хорд (1–4) та довжиною кола (А–Д).

- |                |               |
|----------------|---------------|
| 1 12 см, 16 см | А 5 $\pi$ см  |
| 2 5 см, 12 см  | Б 20 $\pi$ см |
| 3 3 см, 4 см   | В 10 $\pi$ см |
| 4 6 см, 8 см   | Г 13 $\pi$ см |
|                | Д 12 $\pi$ см |

**34.22.** Установити відповідність між довжинами сторін квадрата (1–4) та радіусами вписаних у квадрати кіл (А–Д).

- |         |         |
|---------|---------|
| 1 2 см  | А 3 см  |
| 2 6 см  | Б 15 см |
| 3 10 см | В 1 см  |
| 4 30 см | Г 4 см  |
|         | Д 5 см  |

**34.23.** Установити відповідність між заданими відношеннями радіусів двох концентричних кругів (1–4) та відношенням площі першого круга до площі кільця (А–Д).

- |         |           |
|---------|-----------|
| 1 2 : 1 | А 9 : 5   |
| 2 3 : 2 | Б 16 : 7  |
| 3 5 : 3 | В 4 : 3   |
| 4 4 : 3 | Г 16 : 5  |
|         | Д 25 : 16 |

**Розв'яжіть завдання 34.24–34.33. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

**34.24.** Знайти довжину кола  $l$ , вписаного в ромб, діагоналі якого дорівнюють 15 і 20. У відповідь записати  $\frac{l}{\pi}$ .

**34.25.** У рівнобедрену трапецію вписано коло. Основи трапеції дорівнюють 9 і 25, а бічна сторона — 17. Знайти довжину  $l$  вписаного кола. У відповідь записати  $\frac{l}{\pi}$ .

**34.26.** Периметр правильного трикутника дорівнює 36. На стороні трикутника як на діаметрі, побудовано коло. Знайти довжину  $l$  дуги, розміщену у внутрішній області трикутника. У відповідь записати  $\frac{l}{\pi}$ .

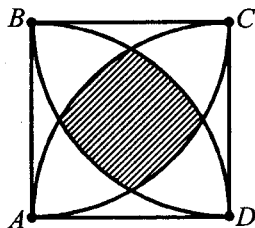
**34.27.** Знайти площу  $S$  круга, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 9 см. У відповідь записати  $\frac{S}{\pi}$ .

34.28. Знайти площу  $S$  круга, вписаного в правильний шестикутник зі стороною 6 см. У відповідь записати  $\frac{S}{\pi}$ .

34.29. Дано два круги зі спільним центром. Радіус меншого круга дорівнює  $\frac{1}{2}$  радіуса більшого. Знайти відношення площі утвореного кільця до площі круга більшого радіуса.

34.30. Знайти відношення площ кругів, вписаного й описаного навколо квадрата.

34.31. На рисунку сторона квадрата дорівнює 5. Кожна його вершина є центром кола радіуса 5. Знайти периметр  $P$  замальованого криволінійного чотирикутника обмеженого цими колами. У відповідь записати  $\frac{3P}{\pi}$ .



34.32. У прямокутну трапецію з основами 1 і 3 вписано коло. Знайти радіус вписаного кола.

34.33. На висоті рівностороннього трикутника як на діаметрі побудовано круг. Довжина сторони трикутника дорівнює 1. Знайти з точністю до 0,01 площу тієї частини трикутника, яка лежить поза даним кругом.

## ТЕМА 35. ПРЯМІ ТА ПЛОЩИНИ В ПРОСТОРИ

### 1. Паралельність прямих і площин.

- 1) ознака паралельності прямої та площини: якщо  $a \parallel b$ ,  $b \subset \alpha$ , то  $a \parallel \alpha$  (рис. 1);
- 2) ознака паралельності площин: якщо  $a$ ,  $b \subset \alpha$ ,  $a \cap b$ ,  $a \parallel a_1$ ,  $b \parallel b_1$ ,  $a_1$ ,  $b_1 \subset \beta$ , то  $\alpha \parallel \beta$  (рис. 2).

### 2. Прямі називають мимобіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні (рис. 3).

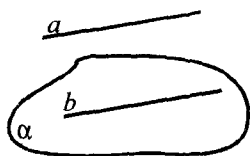


Рис. 1

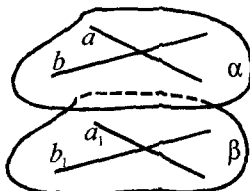


Рис. 2

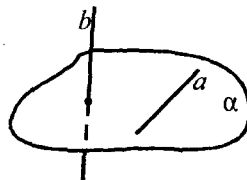


Рис. 3

### 3. Перпендикулярність прямих і площин.

- 1) Ознака перпендикулярності прямої та площини: якщо  $a \perp b \in \alpha$ ,  $a \perp c \in \alpha$ ,  $b \nparallel c$ , то  $a \perp \alpha$  (рис. 4).
4. Перпендикуляр і похила.  $AC \perp \alpha$ ,  $C \in \alpha$ ,  $B \in \alpha$ . Тоді  $AC$  — перпендикуляр,  $AB$  — похила,  $BC$  — її проекція на площину  $\alpha$  (рис. 5).
5. Теорема про три перпендикуляри.  $AB$  — перпендикуляр до площини  $\alpha$ ,  $AC$  — похила,  $BC$  — проекція похилої, пряма  $a$  належить площині  $\alpha$ . Якщо  $a \perp BC$ , то  $a \perp AC$  або якщо  $a \perp AC$ , то  $a \perp BC$  (рис. 6).

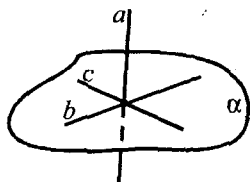


Рис. 4

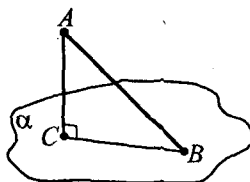


Рис. 5

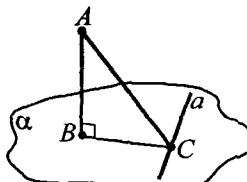


Рис. 6

6. Ознака перпендикулярності площин. Якщо  $a \perp \alpha$ ,  $a \subset \beta$ , то  $\beta \perp \alpha$  (рис. 7).
7. Відстанню між мимобіжними прямими називають довжину їх спільного перпендикуляра (рис. 8).
8. Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються і паралельні до мимобіжних прямих:  $\angle(ab) = \angle(a'b)$  (рис. 9).

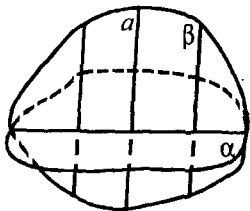


Рис. 7

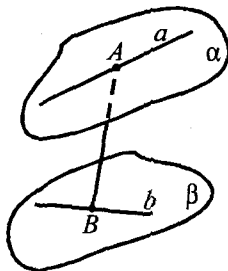


Рис. 8

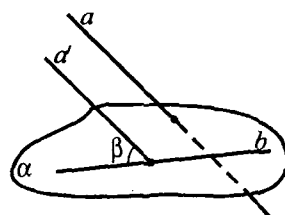


Рис. 9



9. Кут між прямою та площиною називають кут між прямою і її проекцією на цю площину (рис. 10).
10. Кут між площинами. Якщо  $\alpha \cap \beta = a$ ,  $\beta \cap \gamma = b \Rightarrow \angle(a; b)$  — кут між площинами.  $\gamma \perp c$  (рис. 11).

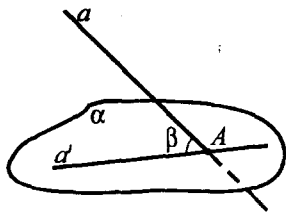


Рис. 10

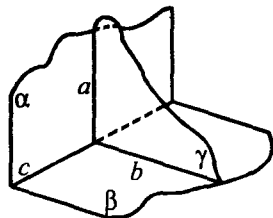
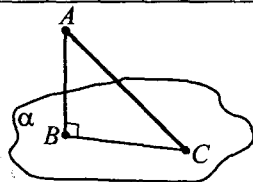


Рис. 11

**Приклад 1.** З даної точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина перпендикуляра дорівнює довжині проекції похилої. Знайти кут між перпендикуляром і похилою.

А	Б	В	Г	Д
45°	60°	30°	40°	20°

■ Нехай з точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведено перпендикуляр  $AB$  ( $AB \perp \alpha$ ) і похилу  $AC$ . Тоді  $BC$  — проекція похилої  $AC$  на площину  $\alpha$ .  $AB = BC$ .  $\angle CAB$  — кут між перпендикуляром і похилою. Трикутник  $ABC$  прямокутний ( $\angle B = 90^\circ$ ) і рівнобедрений. Отже,  $\angle CAB = 45^\circ$ .



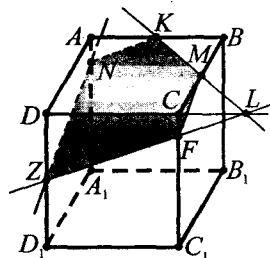
Відповідь. А. ■

**Приклад 2.** Визначити вид перерізу куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, яка проходить через середини ребер  $AB$ ,  $BC$  і  $DD_1$ .

А	Б	В	Г	Д
Трикутник	Трапеція	Паралелограм	П'ятикутник	Прямокутник

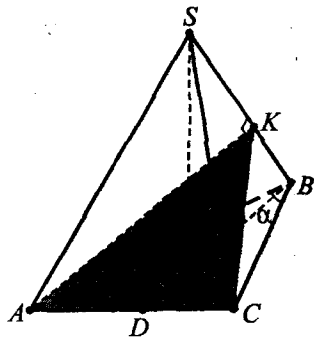
■ Будемо точку  $L = KM \cap DC$ , точку  $F = ZL \cap CC_1$ , точку  $N$  таку, що  $N \in AA_1$ ,  $N = ZN \cap AA_1$ ,  $ZN \parallel FM$ . Отже, перерізом є п'ятикутник  $NKMFZ$ .

Відповідь. Г. ■



**Приклад 3.** В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом  $\alpha$  при вершині. Через основу трикутника проведено переріз перпендикулярно до протилежного бічного ребра, який утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Висота піраміди дорівнює  $H$  і усі її бічні ребра рівні. Знайти площу перерізу. У відповідь записати значення площі перерізу, якщо  $H = 4$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .

■ Нехай  $SABC$  — задана піраміда,  $AB = BC$ ,  $\angle ABC = \alpha$ .  $SO$  — висота піраміди,  $SO = H$ . Оскільки похилі  $SA$ ,  $SB$  і  $SC$  рівні, то рівними будуть і їх проекції  $OA$ ,  $OB$  і  $OC$ . Тому  $O$  — центр кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ . Нехай площина, проведена через сторону  $AC$  перпендикулярно до ребра  $SB$ , перетинає це ребро в точці  $K$ , а грані  $SAB$  і  $SCB$  по відрізках  $AK$  і  $CK$ .  $\Delta SBA = \Delta SBC$  за трьома сторонами. Тому  $\Delta KBA = \Delta KBC$  за двома сторонами і кутом між ними. Тому  $AK = CK$  і трикутник  $AKC$  — рівнобедрений. Проводимо  $KD \perp AC$ . Оскільки  $AK = KC$ , то  $AD = DC$ . Точки  $D$ ,  $O$  і  $B$  рівно-



віддалені від кінців відрізка  $AC$ , тому вони лежать на серединному перпендикулярі до цього відрізка. Отже,  $O \in BD$ ,  $BD \perp AC$ . Кут  $KDB$  — лінійний кут двогранного кута між площинами  $AKC$  і  $ABC$ . За умовою,  $\angle KDB = \beta$ . Оскільки  $SB \perp (AKC)$ , то  $DK \perp SB$ . З  $\Delta KDB$  ( $\angle K = 90^\circ$ ):  $\angle KBD = 90^\circ - \beta$ . З  $\Delta SOB$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):  $OB = SO \operatorname{ctg}(90^\circ - \beta) = H \operatorname{tg} \beta$ . З трикутника  $ABC$  за наслідком з теореми синусів  $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$ , крім того,  $R = OB = H \operatorname{tg} \beta$ . Отже,  $AC = 2H \operatorname{tg} \beta \sin \alpha$ .

Оскільки  $BD$  — висота, а значить медіана та бісектриса трикутника  $ABC$ , то  $DC = H \operatorname{tg} \beta \sin \alpha$ ,  $\angle CBD = \frac{\alpha}{2}$ . З  $\Delta BDC$  ( $\angle D = 90^\circ$ ):  $DB = DC \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = H \operatorname{tg} \beta \sin \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ . З  $\Delta KDB$  ( $\angle K = 90^\circ$ ):

$$DK = DB \cos \beta = H \operatorname{tg} \beta \sin \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \beta = H \sin \beta \sin \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2} AC \cdot DK; \quad S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2} \cdot 2H \operatorname{tg} \beta \sin \alpha \cdot H \sin \beta \sin \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = H^2 \sin^2 \alpha \sin \beta \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Якщо  $H = 4$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ , то:

$$S_{\Delta AKC} = 4^2 \sin^2 60^\circ \sin 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} \frac{60^\circ}{2} = 16 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 6.$$

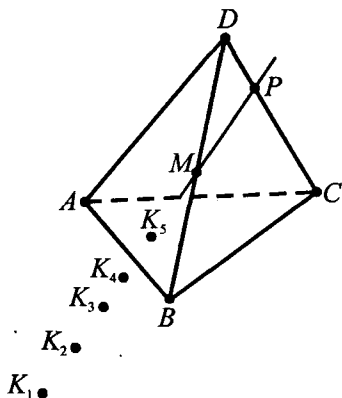
Відповідь. 6. ■

**Завдання 35.1–35.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.**

**35.1.** Шість точок не лежать в одній площині. Яке найбільше число цих точок може лежати на одній прямій?

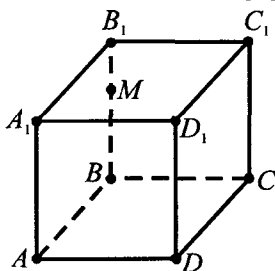
А	Б	В	Г	Д
Дві	три	чотири	п'ять	шість

35.2. На рисунку зображено тетраедр  $ABCD$ . Точка  $M$  належить ребру  $DB$ , а точка  $P$  — ребру  $DC$ . Точки  $K_1, K_2, K_3, K_4$  і  $K_5$  належать площині  $ABC$ . У якій з цих точок пряма  $PM$  перетинає площину  $ABC$ ?



А	Б	В	Г	Д
$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$

35.3. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  і точку  $M$  на ребрі  $BB_1$ . Якій із прямих належить точка перетину прямої  $MC$  із площиною  $A_1 B_1 C_1$ ?

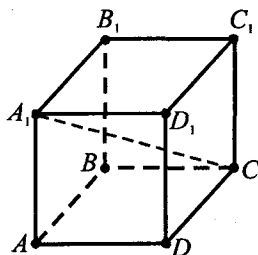


А	Б	В	Г	Д
$A_1 B_1$	$B_1 C_1$	$C_1 D_1$	$A_1 C_1$	$B_1 D_1$

35.4. Яка з наведених фігур не може бути паралельною проекцією прямокутної трапеції?

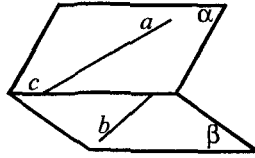
А	Б	В	Г	Д
Трапеція з тупим кутом при більшій основі	прямокутна трапеція	рівнобічна трапеція	відрізок	паралелограм

35.5. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Вказати ортогональну проекцію діагоналі  $A_1 C$  на площину  $DD_1 C_1$ .



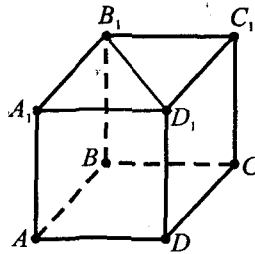
А	Б	В	Г	Д
$C_1D$	$CC_1$	$C_1D_1$	$DD_1$	$CD_1$

35.6. На рисунку площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $c$ . Пряма  $a$  належить площині  $\alpha$ , пряма  $b$  — площині  $\beta$ . Яке з наведених тверджень правильне?



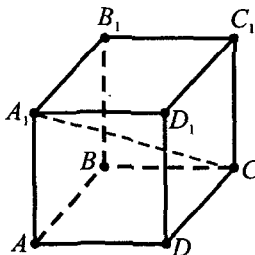
А	Б	В	Г	Д
Прямі $a$ і $b$ перетинаються	прямі $a$ і $b$ паралельні	прямі $a$ і $b$ мимобіжні	прямі $a$ і $b$ паралельні або мимобіжні	прямі $a$ і $b$ паралельні або перетинаються

35.7. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , ребро якого дорівнює 1. Знайти відстань між прямими  $AA_1$  і  $B_1 D_1$ .



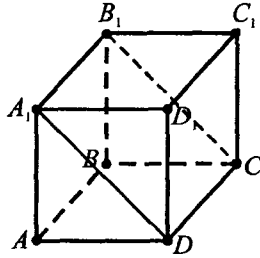
А	Б	В	Г	Д
$1\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$

35.8. Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Вказати кут між прямою  $A_1 C$  і площиною  $DCC_1$ .



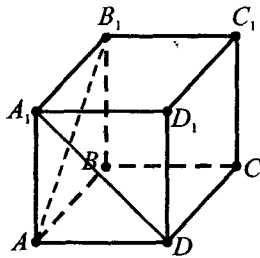
А	Б	В	Г	Д
$\angle A_1 C C_1$	$\angle A_1 C D$	$\angle A_1 C D_1$	$\angle A C B_1$	$\angle A_1 C A$

35.9. Дано прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у якого  $ABCD$  — квадрат зі стороною 1, а бічне ребро  $AA_1 = \sqrt{3}$ . Чому дорівнює кут між площинами  $AA_1 B_1$  і  $A_1 B_1 C$ ?



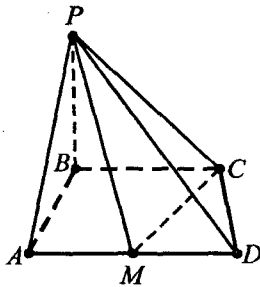
А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	75°	90°

35.10. Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайти кут між прямими  $AB_1$  і  $A_1 D$ .



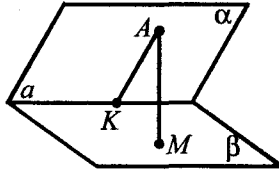
А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	75°	90°

35.11. На рисунку  $ABCD$  — прямокутна трапеція з прямим кутом  $B$ , точка  $M$  — середина сторони  $AD$ .  $PB$  — перпендикуляр до площини  $ABC$ . Визначити кут між площинами  $ABC$  і  $APD$ .



А	Б	В	Г	Д
$\angle PMC$	$\angle PMD$	$\angle PDB$	$\angle PAD$	$\angle PAB$

35.12. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $a$  під кутом  $60^\circ$ . Точка  $A$  належить площині  $\alpha$ . Довжина відрізка  $AM$  є відстанню від точки  $A$  до площини  $\beta$ , а довжина відрізка  $AK$  — відстанню від точки  $A$  до прямої  $a$ . Знайти довжину відрізка  $AK$ , якщо  $AM = \sqrt{3}$ .



А	Б	В	Г	Д
2	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	3

35.13. Точка  $A$  віддалена від площини на відстань  $6\sqrt{3}$  см. Обчислити довжину проєкції похилої, проведеної з цієї точки під кутом  $60^\circ$  до площини.

А	Б	В	Г	Д
18 см	$3\sqrt{3}$ см	3 см	$2\sqrt{3}$ см	6 см

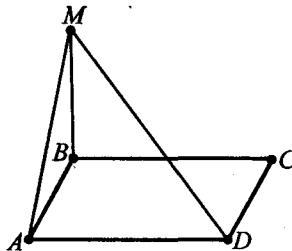
35.14. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює  $a$ . Точка  $A$  розміщена від кожної вершини трикутника на відстані  $b$ . Визначити відстань від точки  $A$  до площини трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{b^2 + \frac{a^3}{3}}$	$\sqrt{b^2 - a^2}$	$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{12}}$	$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$	$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{9}}$

35.15. Точка  $M$  розміщена на відстані  $m$  від кожної сторони правильного трикутника і на відстані  $h$  від площини трикутника. Визначити сторону трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{m^2 + h^2}$	$2\sqrt{m^2 - h^2}$	$2\sqrt{3(m^2 - h^2)}$	$\sqrt{3(m^2 - h^2)}$	$\sqrt{3(m^2 + h^2)}$

35.16. На рисунку  $ABCD$  — квадрат,  $MB$  — перпендикуляр до площини  $ABC$ . Похила  $AM$  нахилена до площини  $ABC$  під кутом  $45^\circ$ . Під яким кутом нахилена до площини  $ABC$  похила  $MD$ ?



А	Б	В	Г	Д
$30^\circ$	$60^\circ$	$\arctg \sqrt{2}$	$\arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\arctg 2$

35.17. З вершини  $A$  квадрата  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $AK$  завдовжки 6 см. Знайти відстань від точки  $K$  до вершини  $C$  квадрата, якщо його сторона дорівнює  $4\sqrt{2}$  см.

А	Б	В	Г	Д
9 см	10,5 см	17 см	14 см	10 см

35.18. Сторони трикутника  $ABC$  дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. З вершини найбільшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр  $AD$ , який дорівнює 15 см. Знайти відстань від точки  $D$  до сторони  $BC$  трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{241}$ см	17 см	$\sqrt{31}$ см	23 см	$\sqrt{335}$ см

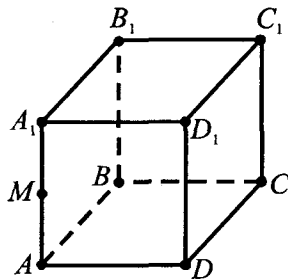
35.19. Знайти кут між площинами, якщо точка, яка лежить на одній з них, віддалена від прямої перетину площин утричі далі, ніж від другої площини.

А	Б	В	Г	Д
$\arccos \frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\arcsin \frac{1}{3}$	$\operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\arccos \frac{1}{3}$

35.20. Відрізок завдовжки 10 м перетинає площину, його кінці розміщені на відстані 2 м і 3 м від площини. Знайти кут між даним відрізком і площиною.

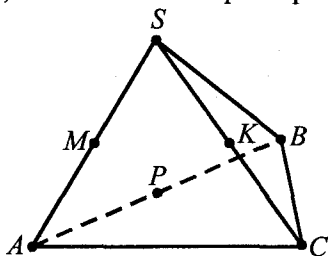
А	Б	В	Г	Д
$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$\arcsin \frac{2}{3}$	$\arccos \frac{2}{5}$

35.21. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром  $2a$ . Точка  $M$  — середина ребра  $AA_1$ . Встановити вид многокутника, який є перерізом куба площиною  $MBC$ , визначити його площу.



А	Б	В	Г	Д
$2a^2\sqrt{3}$	$a^2$	$2a^2$	$2a^2\sqrt{5}$	$5a^2$

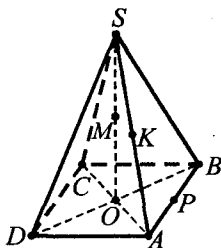
35.22. На рисунку зображено правильний тетраедр  $SABC$  з ребром  $a$ . Точки  $M$ ,  $K$  і  $P$  — відповідно середини ребер  $AS$ ,  $SC$  і  $AB$ . Встановити вид многокутника, який є перерізом тетраедра площиною  $MKP$ , визначити його периметр.



А	Б	В	Г	Д
$3a$	$\frac{3}{2}a$	$a$	$2a$	$4a$

Завдання 35.23–35.29 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

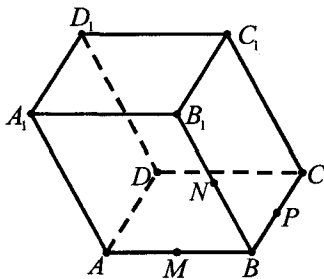
35.23. На рисунку зображено піраміду  $SABCD$ , де  $SO$  — висота піраміди,  $M$  — середина висоти,  $K$  — середина ребра  $SA$ ,  $P$  — середина ребра  $AB$ . Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їхнім взаємним розміщенням (А–Д).



- 1 Пряма  $MK$  і площина  $ABC$
- 2 Прямі  $OP$  і  $MK$
- 3 Пряма  $MP$  і площина  $SDC$
- 4 Площини  $BMK$  і  $SDC$

- А Площини перетинаються
- Б Пряма і площина перетинаються
- В Пряма паралельна площині
- Г Прямі паралельні
- Д Прямі мимобіжні

35.24. На рисунку зображено паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точки  $M$ ,  $N$  і  $P$  — середини ребер  $AB$ ,  $BB_1$  і  $BC$  відповідно. Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їхнім взаємним розміщенням (А–Д).

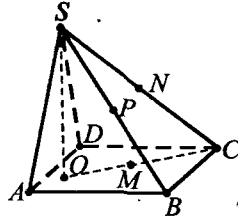




- 1 Прямі  $MN$  і  $DD_1$
- 2 Прямі  $MN$  і  $DC_1$
- 3 Площини  $MNP$  і  $AB_1C$
- 4 Прямі  $NP$  і  $CC_1$

- А Площини паралельні
- Б Площини перетинаються
- В Прямі паралельні
- Г Прямі мимобіжні
- Д Прямі перетинаються

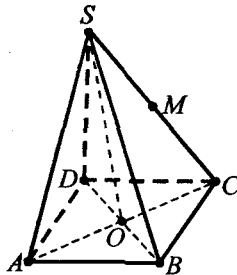
35.25. На рисунку зображено піраміду  $SABCD$ , в основі якої паралелограм.  $SO$  — висота піраміди. Точки  $M$ ,  $N$  і  $P$  — середини відрізків  $OC$ ,  $SC$  і  $SB$  відповідно. Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їх взаємним розміщенням (А–Д).



- 1 Пряма  $MN$  і площина  $ABC$
- 2 Прямі  $MN$  і  $SO$
- 3 Прямі  $MN$  і  $SD$
- 4 Пряма  $OC$  і площина  $ASD$

- А Не можна встановити
- Б Перпендикулярні
- В Перетинаються
- Г Мимобіжні
- Д Паралельні

35.26. На рисунку зображено правильну чотирикутну піраміду  $SABCD$ , у якої  $SO$  — висота,  $M$  — середина ребра  $SC$ , діагональні перерізи — рівносторонні трикутники. Установити відповідність між точками, прямими, площинами (1–4) та відстанями між ними (А–Д).



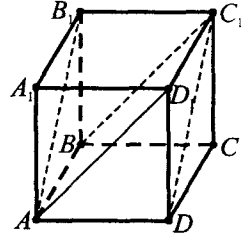
- 1 Точка  $D$  і пряма  $SB$
- 2 Точка  $M$  і площина  $ABC$
- 3 Прямі  $AD$  і  $BC$
- 4 Прямі  $DB$  і  $SC$

- А  $BD$
- Б  $AB$
- В  $AM$
- Г  $\frac{AM}{2}$
- Д  $\frac{SO}{2}$

35.27. Установити відповідність між кількостями точок, які не лежать в одній площині (1–4) та найбільшою з них кількістю точок (А–Д), які можуть лежати на одній прямій.

- |      |      |
|------|------|
| 1 6  | А 6  |
| 2 8  | Б 4  |
| 3 12 | В 16 |
| 4 20 | Г 10 |
|      | Д 18 |

35.28. Установити відповідність між відрізками (1–4), побудованими на гранях і ребрах куба, та величинами кутів між ними (А–Д).



- |                   |              |
|-------------------|--------------|
| 1 $AD_1$ і $BC_1$ | А $60^\circ$ |
| 2 $BA_1$ і $AD_1$ | Б $0^\circ$  |
| 3 $AB$ і $AD_1$   | В $45^\circ$ |
| 4 $DC_1$ і $AB$   | Г $90^\circ$ |
|                   | Д $30^\circ$ |

35.29. Установити відповідність між кутами нахилу (1–4) відрізка завдовжки 10 см до площини та довжиною його проекції на площину (А–Д).

- |              |                  |
|--------------|------------------|
| 1 $30^\circ$ | А 5 см           |
| 2 $45^\circ$ | Б $5\sqrt{3}$ см |
| 3 $60^\circ$ | В $5\sqrt{2}$ см |
| 4 $0^\circ$  | Г 0 см           |
|              | Д 10 см          |

**Розв'яжіть завдання 35.30–35.44. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

35.30. Через кінець  $A$  відрізка  $AB$  проведено площину  $\alpha$ . Через кінець  $B$  і точку  $C$  відрізка  $AB$  проведено паралельні прямі, які перетинають площину  $\alpha$  відповідно в точках  $M$  і  $N$ . Знайти довжину відрізка  $CN$ , якщо  $AC : CB = 2 : 3$ ,  $BM = 12$ .

35.31. Площина  $\alpha$  перетинає сторони кута  $ABC$  у точках  $A_1$  і  $C_1$ , а паралельна їй площина  $\beta$  — у точках  $A_2$  і  $C_2$ . Знайти  $BC_1$ , якщо  $A_1B : A_1A_2 = 1 : 3$ ,  $BC_2 = 12$ .

35.32. З точки  $A$  до площини проведено дві похилі  $AB = 30$  і  $AC = 40$ . Знайти відстань від точки  $A$  до площини, якщо проекції похилих відносяться як  $9 : 16$ .

35.33. З точки  $B$ , яка розміщена від площини на відстані 1, проведено дві похилі, які утворюють із площиною кути  $45^\circ$ , а між собою — кут  $60^\circ$ . Знайти квадрат відстані між кінцями похилих.

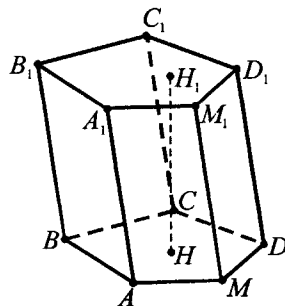
35.34. Один з катетів прямокутного трикутника  $ABC$  дорівнює 6, а гострий кут, прилеглий до цього катета, дорівнює  $30^\circ$ . Через вершину прямого кута  $C$  проведено відрізок  $CD$ ,

перпендикулярний до площини цього трикутника,  $CD = 4$ . Визначити відстань від точки  $D$  до прямої  $AB$ .

- 35.35. З точки  $A$ , що розміщена на колі, радіус якого дорівнює 2, побудований перпендикуляр  $AK$  завдовжки 1 до площини круга. З точки  $A$  проведено діаметр  $AB$ , а з точки  $B$  під кутом  $45^\circ$  до діаметра — хорду  $BC$ . Знайти у сантиметрах відстань від точки  $K$  до хорди  $BC$ .
- 35.36. Основи трапеції дорівнюють 18 см і 12 см. Через більшу основу проведено площину на відстані 5 см від меншої основи. Знайти у сантиметрах відстань від точки перетину діагоналей трапеції до цієї площини.
- 35.37. З точок  $A$  і  $B$ , які лежать у двох перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри  $AA_1$  і  $BB_1$  на лінію перетину площин. Знайти  $AB$ , якщо  $AB_1 = 7$ ,  $BA_1 = 5$ ,  $A_1B_1 = \sqrt{10}$ .
- 35.38. Рівнобедрені трикутники  $ABC$  і  $ABD$  зі спільною основою  $AB$  лежать у різних площинах, кут між якими дорівнює  $\alpha$ . Знайти у градусах кут  $\alpha$ , якщо  $AB = 6$ ,  $CD = \sqrt{21}$ ,  $AC = AD = 4$ .
- 35.39. Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайти площу перерізу куба площиною, яка проходить через вершини  $B_1$  і  $C_1$  та середину ребра  $DD_1$ , якщо ребро куба дорівнює  $\sqrt{5\sqrt{5}}$ .
- 35.40. Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайти площу перерізу куба площиною, яка проходить через вершини  $B_1$  і  $D$  та середину ребра  $CC_1$ , якщо ребро куба дорівнює  $\sqrt{6\sqrt{6}}$ .
- 35.41. Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайти площу перерізу куба з точністю до 0,01 площиною, яка проходить через центр куба і середини ребер  $AB$  і  $AD$ , якщо ребро куба дорівнює 1.
- 35.42. Через центр основи правильної трикутної піраміди паралельно до двох ребер, які не перетинаються, проведено площину. Визначити площу утвореного перерізу, якщо бічне ребро піраміди дорівнює 9, а ребро основи — 7.
- 35.43. У правильній чотирикутній піраміді проведено площину через діагональ основи паралельно до бічного ребра. Сторона основи дорівнює  $\sqrt{2}$ , а бічне ребро — 5. Визначити площу утвореного перерізу.
- 35.44. У правильній чотирикутній піраміді  $SABCD$  через середини сторін  $AB$  і  $AD$  проведено площину, яка паралельна бічному ребру  $SA$ . Знайти площу утвореного перерізу, якщо сторона основи дорівнює  $\sqrt{2}$ , а бічне ребро — 5.

## ТЕМА 36. ПРИЗМА

1.  $ABCDN, A_1B_1C_1D_1N_1$  — основи призми.  
 $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, NN_1$  — бічні ребра.  
 $ABB_1A_1, BCC_1B_1, DCC_1D_1, NDD_1N_1, ANN_1A_1$  — бічні грані.  
 $HN_1$  — висота призми.



### 2. Властивості призми.

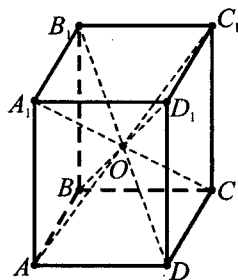
1. Основи призми рівні й лежать у паралельних площинах.
  2. Бічні ребра призми паралельні й рівні.
  3. Бічні грані призми — паралелограми.
3. **Пряма призма** — бічні ребра перпендикулярні до площин основи, **похила призма** — бічні ребра не перпендикулярні до площин основи.  
**Правильна призма:** основи — правильні багатокутники; бічні грані — рівні прямокутники.

### 4. Паралелепіпед — призма, всі грані якої — паралелограми.

**Прямокутний паралелепіпед** — паралелепіпед, у якого всі грані — прямокутники.

Усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда перетинаються в одній точці й цією точкою діляться навпіл.

У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів його вимірів:  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ .



### 5. Площа поверхонь і об'єм.

**Пряма призма.**

Бічна поверхня:  $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H$ , де  $H$  — висота призми.

Повна поверхня:  $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.}$

Об'єм:  $V = S_{осн.} \cdot H$ .

**Похила призма.**

Бічна поверхня:  $S_{б.} = P_{пер.} \cdot AA_1$ , де  $P_{пер.}$  — периметр перерізу, перпендикулярного до бічного ребра.

Повна поверхня:  $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.}$

Об'єм:  $V = S_{осн.} \cdot H$ .

**Прямокутний паралелепіпед.**

Бічна поверхня:  $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H = 2(a + b)c$ .

Повна поверхня:  $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.} = 2(ab + bc + ac)$ .

Об'єм:  $V = S_{осн.} \cdot H = abc$ .

**Куб.**

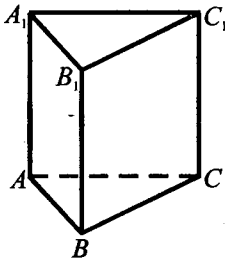
Бічна поверхня:  $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H = 4a^2$ .

Повна поверхня:  $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.} = 6a^2$ .

Об'єм:  $V = S_{осн.} \cdot H = a^3$ .

**Приклад 1.** Об'єм правильної трикутної призми дорівнює  $45\sqrt{3}$  см<sup>3</sup>. Радіус кола, описаного навколо основи призми, дорівнює  $2\sqrt{3}$  см. Обчислити у сантиметрах висоту призми.

■ Нехай  $ABCA_1B_1C_1$  — призма,  $AA_1$  — її висота,  $R$  — радіус описаного навколо основи кола.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , де  $a$  — сторона правильного трикутника  $ABC$ .  $\frac{a\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ ;  $a = 6$  (см).  $V = S_0 \cdot H$ , де  $S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$  (см<sup>2</sup>) — площа основи призми,  $H = AA_1$  — її висота. Звідси:  $H = \frac{V}{S_0} = \frac{45\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = 5$  (см).

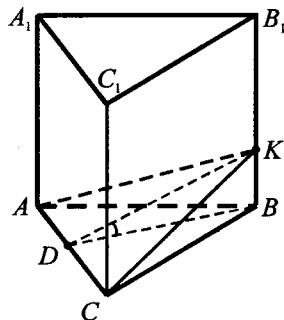


Відповідь. 5. ■

**Приклад 2.** Сторона основи правильної трикутної призми  $ABCA_1B_1C_1$  дорівнює  $8\sqrt{3}$  см. На ребрі  $BB_1$  позначено точку  $K$  так, що  $BK : KB_1 = 3 : 5$ . Знайти тангенс кута між площинами  $ABC$  і  $AKC$ , якщо відстань між прямими  $BC$  й  $A_1C_1$  дорівнює 16 см.

■ Прямі  $BC$  і  $A_1C_1$  — мимобіжні,  $CC_1$  — їх спільний перпендикуляр, бо правильна призма є прямою і її бічне ребро перпендикулярне до площин основ, а значить, і до сторін основ  $BC$  і  $A_1C_1$ . Отже,  $CC_1 = 16$  см. Тоді  $BB_1 = CC_1 = 16$  см.

Нехай  $BK = 3x$  см, тоді  $KB_1 = 5x$  см. Звідки  $3x + 5x = 16$ ;  $x = 2$ .  $BK = 3x = 6$  (см). Позначимо точку  $D$  — середину сторони  $AC$ . Очевидно, що  $BD \perp AC$ , а значить,  $KD \perp AC$  за теоремою про три перпендикуляри. Оскільки  $KD \perp AC$  і  $BD \perp AC$ , то кут  $KDB$  — лінійний кут двогранного кута утвореного площинами  $ABC$  і  $AKC$ .



З рівностороннього трикутника  $ABC$ :  $BD = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8\sqrt{3} = 12$  (см). Із прямокутного

трикутника  $KBD$ :  $\text{tg} \angle KDB = \frac{KB}{BD} = \frac{6}{12} = 0,5$ .

Отже, тангенс кута між площинами  $ABC$  і  $AKC$  дорівнює 0,5.

Відповідь. 0,5. ■

**Завдання 36.1–36.22** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**36.1.** Сторона куба дорівнює 10 см. Знайти площу поверхні куба.

А	Б	В	Г	Д
80 см <sup>2</sup>	800 см <sup>2</sup>	400 см <sup>2</sup>	360 см <sup>2</sup>	600 см <sup>2</sup>

36.2. Діагональ грані куба дорівнює  $4\sqrt{2}$  см. Знайти об'єм куба.

А	Б	В	Г	Д
$4 \text{ см}^3$	$16 \text{ см}^3$	$12\sqrt{3} \text{ см}^3$	$64 \text{ см}^3$	$48 \text{ см}^3$

36.3. Обчислити довжину ребра куба, діагональ якого дорівнює  $2\sqrt{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{2}$	2

36.4. Знайти діагональ прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.

А	Б	В	Г	Д
5,5 см	49 см	36 см	11 см	7 см

36.5. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом  $45^\circ$ . Знайти бічне ребро паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
6,5 см	13 см	12 см	8,5 см	9,5 см

36.6. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з гіпотенузою 10 см і катетом 6 см. Знайти площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.

А	Б	В	Г	Д
$120 \text{ см}^2$	$90 \text{ см}^2$	$60 \text{ см}^2$	$180 \text{ см}^2$	$240 \text{ см}^2$

36.7. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см, а бічне ребро дорівнює  $2\sqrt{3}$  см. Знайти об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
$96\sqrt{3} \text{ см}^3$	$96 \text{ см}^3$	$24\sqrt{3} \text{ см}^3$	$24 \text{ см}^3$	$12\sqrt{3} \text{ см}^3$

36.8. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 12 см, а діагональ бічної грані дорівнює 13 см. Знайти бічну поверхню призми.

А	Б	В	Г	Д
$60 \text{ см}^2$	$195 \text{ см}^2$	$360 \text{ см}^2$	$180 \text{ см}^2$	$468 \text{ см}^2$

36.9. Знайти площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює  $a$ , а висота —  $H$ .

А	Б	В	Г	Д
$4aH$	$3aH$	$4a(a+H)$	$a(a+4H)$	$2a(a+2H)$

36.10. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з основами 4 см і 10 см і бічною стороною 5 см. Бічне ребро призми дорівнює 10 см. Обчислити повну поверхню призми.

А	Б	В	Г	Д
$170 \text{ см}^2$	$176 \text{ см}^2$	$186 \text{ см}^2$	$190 \text{ см}^2$	$296 \text{ см}^2$

36.11. Основою похилої призми є паралелограм зі сторонами 6 см і 3 см і гострим кутом  $45^\circ$ . Бічне ребро призми дорівнює 4 см і нахилене до площини основи під кутом  $30^\circ$ . Знайти об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
$18\sqrt{6} \text{ см}^3$	$12\sqrt{6} \text{ см}^3$	$18\sqrt{2} \text{ см}^3$	$9\sqrt{2} \text{ см}^3$	$36\sqrt{2} \text{ см}^3$

36.12. Бічне ребро похилої чотирикутної призми дорівнює 12 см, а перпендикулярним перерізом є ромб зі стороною 5 см. Знайти площу бічної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
$60 \text{ см}^2$	$80 \text{ см}^2$	$180 \text{ см}^2$	$240 \text{ см}^2$	$300 \text{ см}^2$

36.13. Куб з ребром 1 м поділили на кубики з ребром 1 см й усі ці кубики поставили в стовпець. Чому дорівнює висота стовпця?

А	Б	В	Г	Д
1 км	10 км	100 км	1000 км	10000 км

36.14. Площа діагонального перерізу куба дорівнює  $4\sqrt{2} \text{ см}^2$ . Знайти площу поверхні куба.

А	Б	В	Г	Д
$36\sqrt{2} \text{ см}^2$	$16 \text{ см}^2$	$24 \text{ см}^2$	$192 \text{ см}^2$	$32 \text{ см}^2$

36.15. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площі його діагональних перерізів дорівнюють  $S_1$  і  $S_2$ . Визначити висоту паралелепіпеда, якщо його об'єм дорівнює  $V$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2S_1S_2}{V}$	$\frac{S_1S_2}{V}$	$\frac{S_1S_2}{2V}$	$\frac{V}{S_1S_2}$	$\frac{V}{2S_1S_2}$

36.16. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 13 см, а діагональ бічної грані дорівнює 12 см. Знайти площу основи призми.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{313} \text{ см}^2$	$25 \text{ см}^2$	$50 \text{ см}^2$	$144 \text{ см}^2$	$169 \text{ см}^2$

36.17. У правильній чотирикутній призмі площа діагонального перерізу дорівнює  $S$ . Визначити площу бічної поверхні.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{S}$	$\sqrt{2S}$	$2\sqrt{2S}$	$2S$	$2\sqrt{2S}$

36.18. Діагональним перерізом правильної чотирикутної призми є квадрат, площа якого дорівнює  $S$ . Визначити об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
$S\sqrt{2S}$	$\frac{S\sqrt{S}}{\sqrt{2}}$	$2S\sqrt{S}$	$S\sqrt{S}$	$\frac{S\sqrt{S}}{2}$

36.19. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює  $S$ , а площі діагональних перерізів паралелепіпеда —  $S_1$  і  $S_2$ . Визначити висоту паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{\frac{S_1 S_2}{2S}}$	$\sqrt{\frac{2S_1 S_2}{S}}$	$\sqrt{\frac{S_1 S_2}{S}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{S_1 S_2}{S}}$	$\sqrt{\frac{S}{2S_1 S_2}}$

36.20. Бічна поверхня правильної чотирикутної призми дорівнює  $Q$ , а її об'єм —  $V$ . Визначити сторону основи призми.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2V}{Q}$	$\frac{V}{2Q}$	$\frac{V}{4Q}$	$\frac{V}{Q}$	$\frac{4V}{Q}$

36.21. Розгорткою бічної поверхні правильної чотирикутної призми є квадрат зі стороною 8 дм. Знайти об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
16 дм <sup>3</sup>	24 дм <sup>3</sup>	32 дм <sup>3</sup>	48 дм <sup>3</sup>	64 дм <sup>3</sup>

36.22. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють  $S_1$ ,  $S_2$  і  $S_3$ . Визначити об'єм паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{S_1 S_2 S_3}$	$2\sqrt{S_1 S_2 S_3}$	$\frac{\sqrt{S_1 S_2 S_3}}{2}$	$8\sqrt{S_1 S_2 S_3}$	$\frac{\sqrt{S_1 S_2 S_3}}{8}$

Завдання 36.23–36.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

36.23. Установити відповідність між сторонами основи та діагоналями (1–4) бічних граней правильних трикутних призм та площами їх бічних поверхонь (А–Д).

- |               |                       |
|---------------|-----------------------|
| 1 3 см, 5 см  | А 180 см <sup>2</sup> |
| 2 6 см, 10 см | Б 504 см <sup>2</sup> |
| 3 5 см, 13 см | В 36 см <sup>2</sup>  |
| 4 7 см, 25 см | Г 144 см <sup>2</sup> |
|               | Д 164 см <sup>2</sup> |

36.24. Установити відповідність між площами діагональних перерізів (1–4), які є квадратами у правильних чотирикутних призм, та об'ємами цих призм (А–Д).

- |                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| 1 64 см <sup>2</sup> | А 32 см <sup>3</sup>  |
| 2 16 см <sup>2</sup> | Б 234 см <sup>3</sup> |
| 3 36 см <sup>2</sup> | В 108 см <sup>3</sup> |
| 4 4 см <sup>2</sup>  | Г 256 см <sup>3</sup> |
|                      | Д 4 см <sup>3</sup>   |



**Розв'яжіть завдання 36.25–36.36. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

- 36.25.** Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 12, а висота призми — 6. Знайти площу перерізу цієї призми площиною, яка проходить через сторону нижньої основи і протилежну вершину.
- 36.26.** Діагональ правильної чотирикутної призми утворює з площиною основи кут  $45^\circ$ . Знайти у градусах кут, утворений цією діагоналлю з площиною бічної грані.
- 36.27.** Основою паралелепіпеда є ромб. Діагоналі паралелепіпеда дорівнюють 8 см і 5 см, а висота — 2 см. Знайти у сантиметрах сторону основи.
- 36.28.** Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда мають довжини 2, 2 і  $2\sqrt{6}$ . Визначити діагональ паралелепіпеда.
- 36.29.** Визначити об'єм прямокутного паралелепіпеда, основою якого є прямокутник зі сторонами 3 і 4, а площа діагонального перерізу 20.
- 36.30.** У прямому паралелепіпеді сторони основи 2 і 8, а кут між ними  $30^\circ$ . Бічна поверхня паралелепіпеда дорівнює 20. Визначити об'єм паралелепіпеда.
- 36.31.** Периметри двох граней правильної трикутної призми дорівнюють 48 см і 30 см. Знайти об'єм  $V$  призми у кубічних сантиметрах. У відповідь записати  $\frac{V}{\sqrt{3}}$ .
- 36.32.** Знайти у кубічних сантиметрах об'єм похилої трикутної призми, якщо відстані між її бічними ребрами дорівнюють 3,7 см, 1,3 см і 3 см, а площа бічної поверхні —  $480 \text{ см}^2$ .
- 36.33.** Основою похилого паралелепіпеда є ромб зі стороною 4 см і гострим кутом  $60^\circ$ . Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 4 см й утворює з ребрами основи, які виходять з цієї ж вершини, кути  $45^\circ$ . Знайти об'єм паралелепіпеда у кубічних сантиметрах.
- 36.34.** Висота правильної чотирикутної призми дорівнює 5, а кут між діагоналями, проведеними з однієї вершини основи у двох суміжних бічних гранях, —  $60^\circ$ . Визначити площу бічної поверхні призми.
- 36.35.** Основою призми є правильний трикутник зі стороною 4. Одна з бічних граней перпендикулярна до основи і є ромбом, діагональ якого дорівнює 6. Знайти об'єм  $V$  призми. У відповідь записати  $\sqrt{21}V$ .
- 36.36.** Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 4 і 6. Бічне ребро дорівнює 2 й утворює із суміжними сторонами основи кути в  $60^\circ$ . Знайти об'єм  $V$  паралелепіпеда. У відповідь записати  $\sqrt{2}V$ .

## ТЕМА 37. ПІРАМІДА

1.  $ABCDM$  — основа піраміди,  $S$  — вершина,  $SA, SB, SC, SD, SM$  — бічні ребра,  $SO$  — висота,  $SO \perp (ABCDM)$

2. **Властивості.**

1. Якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під однаковим кутом, то вони рівні і вершина піраміди проектується у центр кола, описаного навколо основи піраміди.

2. Якщо всі бічні грані нахилені до площини основи під однаковим кутом  $\alpha$ , то вершина піраміди проектується у центр кола, вписаного в основу піраміди, а площа основи піраміди дорівнює добутку площі бічної поверхні та косинуса кута  $\alpha$ :

$$S_{осн.} = S_b \cdot \cos \alpha.$$

3. **Правильна піраміда:** основа — правильний багатокутник; вершина проектується в центр основи. Висота  $SK$  бічної грані, проведена з її вершини — апофема. Площа бічної поверхні:  $S_b = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot l$ , де  $l$  — апофема. Площа повної поверхні:  $S_n = S_b + S_{осн.}$

4. **Об'єм:**  $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$ .

5. **Зрізана піраміда.**

$ABCD$  — нижня основа,  $A_1B_1C_1D_1$  — верхня основа. Висота  $OO_1$  — відрізок прямої, перпендикулярної до основ й обмежений ними.

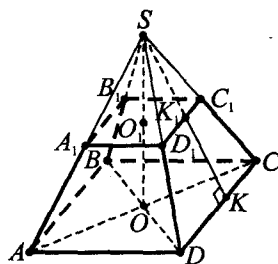
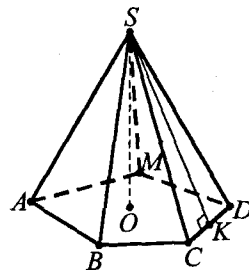
$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{SO_1^2}{SO^2}, \quad \frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SD_1}{SD}.$$

**Правильна зрізана піраміда:** основи — правильні багатокутники; відрізок, який з'єднує центри основ, є висотою. Площа бічної поверхні:  $S_b = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot m$ , де  $P_1$  і  $P_2$  — периметри основ,  $m$  — апофема.

Площа повної поверхні:  $S_n = S_b + S_1 + S_2$ , де  $S_1 + S_2$  — площі основ.

Об'єм:  $V = \frac{1}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) \cdot H$ , де  $H$  — висота.

**Приклад 1.** Обчислити об'єм піраміди, в основі якої лежить ромб з діагоналями 8 см і 6 см, якщо висота піраміди дорівнює 16 см.



А	Б	В	Г	Д
128 см <sup>3</sup>	32 см <sup>3</sup>	256 см <sup>3</sup>	64 см <sup>3</sup>	512 см <sup>3</sup>

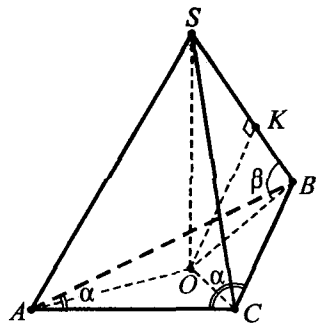
■ В основі піраміди лежить ромб з діагоналями  $d_1 = 8$  см і  $d_2 = 6$  см. Обчислимо його площу:

$$S_{осн.} = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Знайдемо об'єм піраміди: } V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 16 = 128 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. А. ■

**Приклад 2.** В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом  $\alpha$  при основі. Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут  $\beta$ . Визначити об'єм піраміди, якщо відстань від основи її висоти до бічного ребра дорівнює  $d$ . У відповідь записати значення об'єму, якщо  $d = 3$  см,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .

■ Нехай  $SABC$  — задана піраміда, основа якої — рівнобедрений трикутник  $ABC$  ( $AB = BC$ ),  $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ . Проведемо висоту  $SO$ .  $OA$ ,  $OB$  і  $OC$  — відповідно проєкції ребер  $SA$ ,  $SB$  і  $SC$  на площину основи.  $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$ . Прямокутні трикутники  $SOA$ ,  $SOB$  і  $SOC$  мають спільний катет  $SO$  та рівні гострі кути. Тому  $\triangle SOA = \triangle SOB = \triangle SOC$ . У рівних трикутників відповідні елементи рівні, тому їх висоти, проведені до гіпотенуз будуть рівними. Це означає, що відстані від точки  $O$  до бічних ребер будуть рівними. Проведемо  $OK \perp SB$ . За умовою,  $OK = d$ . З трикутника  $OKB$  ( $\angle K = 90^\circ$ ):



$$OB = \frac{OK}{\sin \beta} = \frac{d}{\sin \beta}. \text{ Із трикутника } SOB \text{ } (\angle O = 90^\circ): H = SO = OB \operatorname{tg} \beta = \frac{d}{\sin \beta} \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{d}{\cos \beta}.$$

Оскільки  $OA = OB = OC$ , то точка  $O$  — центр кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ ,

$OB = R$ . За наслідком з теореми синусів для трикутника  $ABC$ :  $\frac{BC}{\sin \alpha} = 2OB$ ;

$$BC = 2OB \sin \alpha = \frac{2d \sin \alpha}{\sin \beta}. \text{ Оскільки в трикутнику } ABC \text{ } AB = BC \text{ і } \angle B = 180^\circ - 2\alpha, \text{ то}$$

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \left( \frac{2d \sin \alpha}{\sin \beta} \right)^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{2d^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha}{\sin^2 \beta}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{2d^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha}{\sin^2 \beta} \cdot \frac{d}{\cos \beta} = \frac{2d^3 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha}{3 \sin^2 \beta \cos \beta} =$$

$$= \frac{4d^3 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha}{3 \sin \beta \cos 2\beta}. \text{ Якщо } d = 3 \text{ см, } \alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ, \text{ то } V = \frac{4 \cdot 3^3 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot 1}{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 72.$$

Відповідь. 72. ■

Завдання 37.1–37.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

37.1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює  $b\sqrt{3}$ , а висота піраміди —  $H$ . Визначити бічне ребро піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3b^2 - H^2}$	$\sqrt{b^2 + H^2}$	$\sqrt{3b^2 + H^2}$	$\frac{\sqrt{b^2 + 4H^2}}{2}$	$\sqrt{b^2 - H^2}$

37.2. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $a$ . Бічна грань нахилена до площини основи під кутом  $\beta$ . Визначити апофему піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a}{2 \sin \beta}$	$\frac{a}{2 \operatorname{tg} \beta}$	$\frac{a \cos \beta}{2}$	$\frac{a \sin \beta}{2}$	$\frac{a}{2 \cos \beta}$

37.3. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро — 5 см. Знайти бічну поверхню піраміди.

А	Б	В	Г	Д
30 см <sup>2</sup>	12 см <sup>2</sup>	36 см <sup>2</sup>	72 см <sup>2</sup>	45 см <sup>2</sup>

37.4. Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює 6 см. Знайти об'єм піраміди з основою  $BDD_1$  і вершиною  $C$ .

А	Б	В	Г	Д
36 см <sup>3</sup>	48 см <sup>3</sup>	$24\sqrt{2}$ см <sup>3</sup>	$36\sqrt{2}$ см <sup>3</sup>	$108\sqrt{2}$ см <sup>3</sup>

37.5. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, апофема піраміди — 10 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу перерізу піраміди, проведеного через середину висоти паралельно до площини основи.

А	Б	В	Г	Д
24 см <sup>2</sup>	72 см <sup>2</sup>	48 см <sup>2</sup>	9 см <sup>2</sup>	36 см <sup>2</sup>

37.6. Висота та бічне ребро правильної чотирикутної піраміди відповідно дорівнюють 3 см і 5 см. Знайти об'єм піраміди.

А	Б	В	Г	Д
48 см <sup>3</sup>	128 см <sup>3</sup>	64 см <sup>3</sup>	96 см <sup>3</sup>	32 см <sup>3</sup>

37.7. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см. Знайти висоту піраміди, якщо бічні грані нахилені до площини основи під кутом 45°.

А	Б	В	Г	Д
1 см	4 см	2 см	$2\sqrt{2}$ см	$4\sqrt{2}$ см

37.8. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см. Знайти висоту піраміди, якщо всі її бічні ребра рівні та дорівнюють 13 см.

А	Б	В	Г	Д
12 см	9 см	10 см	11 см	8 см

37.9. Основа піраміди — квадрат зі стороною  $a$ . Висота піраміди дорівнює  $H$  і проходить через одну з вершин основи. Визначити площу бічної поверхні піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$2aH$	$4aH$	$2a(H + \sqrt{a^2 + H^2})$	$a(H + \sqrt{a^2 + H^2})$	$a(H + \sqrt{a^2 - H^2})$

37.10. Висота піраміди поділена на 4 рівні частини і через точки поділу проведено перерізи, паралельні до основи. Знайти площу найбільшого перерізу, якщо площа основи дорівнює  $800 \text{ см}^2$ .

А	Б	В	Г	Д
$600 \text{ см}^2$	$400 \text{ см}^2$	$450 \text{ см}^2$	$350 \text{ см}^2$	$150 \text{ см}^2$

37.11. Знайти висоту правильної чотирикутної зрізаної піраміди, у якої сторони основ дорівнюють  $a$  і  $b$  ( $a > b$ ), а кут нахилу бічного ребра до більшої основи дорівнює  $\alpha$ .

А	Б	В	Г	Д
$(a-b) \operatorname{tg} \alpha$	$\frac{a-b}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \alpha$	$\frac{a-b}{\sqrt{2}} \sin \alpha$	$\frac{a-b}{\sqrt{2}} \cos \alpha$	$(a-b) \sin \alpha$

37.12. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторони основи  $a$  і  $b$  ( $a > b$ ), двогранний кут при більшій основі —  $\beta$ . Знайти висоту піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a-b}{2} \operatorname{tg} \beta$	$(a-b) \operatorname{tg} \beta$	$(a-b) \sin \beta$	$\frac{a-b}{2} \sin \beta$	$(a-b) \cos \beta$

37.13. Ребро правильного тетраедра дорівнює  $a$ . Визначити об'єм тетраедра.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$	$\frac{a^3 \sqrt{2}}{4}$	$\frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$	$\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$	$\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$

37.14. У правильній трикутній піраміді бічне ребро нахилено до площини основи під кутом  $60^\circ$ . Під яким кутом нахилена до площини основи бічна грань?

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{arctg} \sqrt{3}$	$\operatorname{arctg}(2\sqrt{3})$	$\operatorname{arcsin} \sqrt{3}$	$\operatorname{arcsin}(2\sqrt{3})$	$\operatorname{arccos} \sqrt{3}$

37.15. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює  $45^\circ$ . Під яким кутом нахилено до площини основи бічне ребро?

А	Б	В	Г	Д
$45^\circ$	$\operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{arctg} \sqrt{2}$	$\operatorname{arctg} \sqrt{2}$	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$

37.16. Площа основи правильної трикутної піраміди дорівнює  $S$ , а площа бічної поверхні —  $Q$ . Визначити двогранний кут при основі.

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{arcsin} \frac{S}{Q}$	$\operatorname{arccos} \frac{S}{Q}$	$\operatorname{arccos} \frac{S}{Q}$	$\operatorname{arccos} \frac{Q}{S}$	$\operatorname{arcsin} \frac{S}{Q}$

37.17. Повна поверхня правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $S$ . Двогранний кут при ребрі основи —  $60^\circ$ . Визначити бічну поверхню піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{9}S$	$\frac{1}{2}S$	$\frac{5}{6}S$	$\frac{3}{4}S$	$\frac{2}{3}S$

37.18. Діагональним перерізом правильної чотирикутної піраміди є прямокутний трикутник, площа якого дорівнює  $Q$ . Знайти площу основи піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$2Q$	$4Q$	$Q$	$\frac{Q}{2}$	$\frac{Q}{4}$

37.19. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює  $a$ , а площа перерізу піраміди площиною, яка проходить через бічне ребро і перпендикулярна до основи, дорівнює  $Q$ . Знайти об'єм піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$Qa$	$2Q \cdot \frac{a}{3}$	$3Qa$	$Q \cdot \frac{a}{4}$	$4Qa$

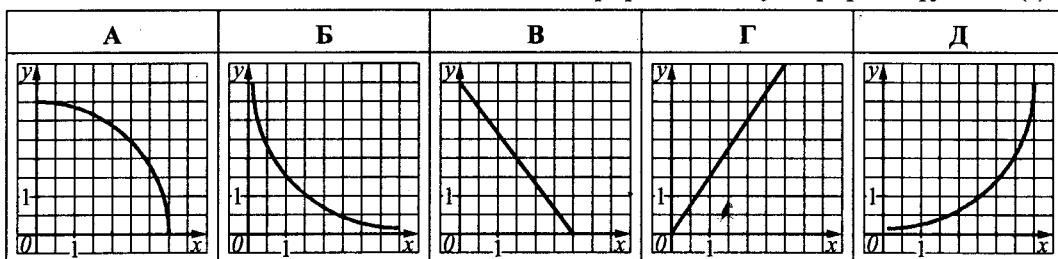
37.20. Усередині призми з об'ємом  $V$  взято довільну точку  $O$  й побудовано дві піраміди з вершиною  $O$ , що мають основами основи призми. Знайти суму об'ємів цих пірамід.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{9}V$	$\frac{1}{4}V$	$\frac{2}{3}V$	$\frac{1}{6}V$	$\frac{1}{3}V$

37.21. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні й дорівнюють  $a$ ,  $b$  і  $c$ . Визначити об'єм піраміди.

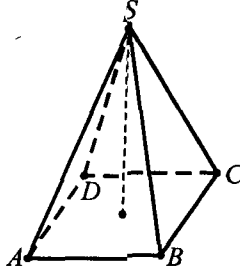
А	Б	В	Г	Д
$6abc$	$abc$	$\frac{1}{12}abc$	$\frac{1}{6}abc$	$\frac{1}{3}abc$

37.22.  $S(x)$  — площа перерізу правильної чотирикутної піраміди, проведеного паралельно до основи на відстані  $x$  від неї. Який з наведених графіків може бути графіком функції  $S(x)$ ?



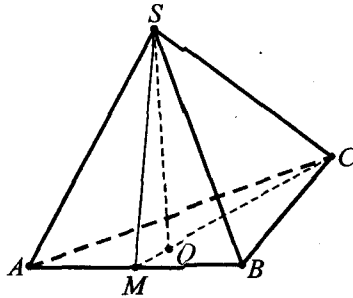
Завдання 37.23–37.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

37.23. На рисунку зображено правильну піраміду  $SABCD$ , висота якої дорівнює діагоналі основи. Установити відповідність між кутами (1–4) та їхніми градусними мірами (А–Д).



- |  |                                  |
|--|----------------------------------|
| 1 Кут нахилу бічного ребра до площини основи | А $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$ |
| 2 Кут нахилу апофема до площини основи       | Б $\arctg \frac{\sqrt{10}}{10}$  |
| 3 Кут між прямими $SA$ і $DC$                | В $\arctg 2$                     |
| 4 $\angle ASC$                               | Г $\arctg 2\sqrt{2}$             |
|  | Д $2\arctg \frac{1}{2}$          |

37.24. На рисунку зображено правильну трикутну піраміду  $SABC$ , у якої:  $SO$  — висота;  $SM$  — апофема; сторона основи дорівнює  $a$ ; бічна грань нахилена до площини основи під кутом  $\alpha$ . Установити відповідність між елементами піраміди (1–4) та їхніми величинами (А–Д).



- |        |  |
|--------|--|
| 1 $SM$ | А $\frac{\sqrt{3}}{3} a$                                     |
| 2 $SB$ | Б $\frac{\sqrt{3} a}{6 \cos \alpha}$                         |
| 3 $SO$ | В $\frac{a}{2\sqrt{3} \cos \alpha} \sqrt{1+3 \cos^2 \alpha}$ |
| 4 $OC$ | Г $\frac{\sqrt{3}}{2} a \sin \alpha$                         |
|        | Д $\frac{\sqrt{3}}{6} a \operatorname{tg} \alpha$            |

37.25. Установити відповідність між пірамідами (1–4) та ортогональними проєкціями їх вершин на площину основи (А–Д).

- 1 Усі бічні грані піраміди рівнонахилені до площини основи
- 2 Усі бічні ребра піраміди рівнонахилені до площини основи
- 3 Дві сусідні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи
- 4 Піраміда, в основі якої рівносторонній трикутник. Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші рівнонахилені до неї

- А Вершина многокутника основи
- Б Середина сторони основи
- В Точка перетину діагоналей основи
- Г Центр кола, вписаного в многокутник основи
- Д Центр кола, описаного навколо многокутника основи

37.26. Установити відповідність між довжиною ребра (1–4) тетраедра та його об'ємом (А–Д).

- 1 6 см
- 2 12 см
- 3 18 см
- 4 24 см

- А  $144\sqrt{2}$  см<sup>3</sup>
- Б  $1152\sqrt{2}$  см<sup>3</sup>
- В  $18\sqrt{2}$  см<sup>3</sup>
- Г  $26\sqrt{2}$  см<sup>3</sup>
- Д  $486\sqrt{2}$  см<sup>3</sup>

37.27. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $S$  і є прямокутним трикутником. Установити відповідність між площею перерізу (1–4) та площею бічної поверхні (А–Д) піраміди.

- 1  $4$  см<sup>2</sup>
- 2  $8$  см<sup>2</sup>
- 3  $2\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>
- 4  $5$  см<sup>2</sup>

- А  $16\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>
- Б  $12$  см<sup>2</sup>
- В  $10\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>
- Г  $14\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>
- Д  $8\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>

Розв'яжіть завдання 37.28–37.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.

37.28. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з висотою 9 см й основою 6 см. Кожне з бічних ребер піраміди дорівнює 13 см. Знайти у сантиметрах висоту піраміди.

37.29. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут  $30^\circ$ . Відрізок, що сполучає основу висоти з серединою бічного ребра, дорівнює  $\sqrt{3}$ . Знайти об'єм піраміди.

37.30. Площа основи піраміди дорівнює  $72$  см<sup>2</sup>. Площі двох перерізів, які паралельні до основи, дорівнюють  $18$  см<sup>2</sup> і  $50$  см<sup>2</sup>. Знайти у сантиметрах висоту піраміди, якщо відстань між перерізами дорівнює 8 см.

37.31. Сторони основи правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 2 см і 5 см, бічне ребро — 2 см. Знайти у сантиметрах висоту піраміди.

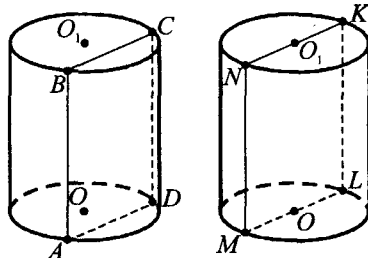
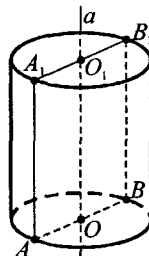
37.32. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 1 і нахилена до площини основи під кутом  $60^\circ$ . Визначити повну поверхню піраміди.



- 37.33. У правильній піраміді площа основи становить  $\frac{1}{3}$  площі повної поверхні. Знайти у градусах двогранний кут при основі піраміді.
- 37.34. Основою піраміді є правильний трикутник зі стороною 2, одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи, а дві інші утворюють із площиною основи кут  $45^\circ$ . Визначити об'єм піраміді.
- 37.35. У правильній чотирикутній піраміді відстань від центра основи до бічної грані дорівнює 3. Бічні грані нахилені до основи під кутом  $60^\circ$ . Визначити об'єм піраміді.
- 37.36. Основою піраміді є ромб зі стороною  $\sqrt{3}$  і кутом  $30^\circ$ . Бічні грані, що проходять через сторони гострого кута ромба, перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом  $60^\circ$ . Знайти об'єм піраміді.
- 37.37. Бічні ребра правильної трикутної піраміді взаємно перпендикулярні й дорівнюють  $7\sqrt{2}$ . Знайти відстань між мимобіжними ребрами піраміді.
- 37.38. У правильній чотирикутній піраміді  $PABCD$  з вершиною  $P$  проведено переріз через сторону  $AB$  і середину бічного ребра  $PC$ . У якому відношенні цей переріз поділяє об'єм піраміді?
- 37.39. Основою піраміді є рівносторонній трикутник зі стороною  $\sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{3}}$ . Одна з бічних граней є рівностороннім трикутником і перпендикулярна до площини основи. Визначити бічну поверхню піраміді.
- 37.40. У трикутній піраміді всі чотири грані — рівні рівнобедрені трикутники з основою  $\sqrt{14}$  й бічною стороною 4. Визначити об'єм піраміді.
- 37.41. Основою піраміді є прямокутник, площа якого дорівнює 9. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутами  $30^\circ$  і  $60^\circ$ . Визначити об'єм піраміді.

## ТЕМА 38. ЦИЛІНДР

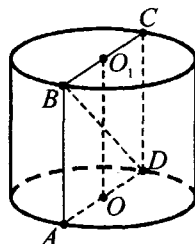
1. Основи — рівні круги,  $l = AA_1$  — твірна.  
Пряма  $a$  — вісь симетрії циліндра.  
 $H = OO_1$  — висота циліндра,  $H = l$ .
2. Площа бічної поверхні:  $S = 2\pi RH$ .
3. Площа повної поверхні:  
 $S_{повн.} = S_{бічн.} + 2S_{осн.}$ ,  $S_{повн.} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + H)$ .
4. Об'єм:  $V = \pi R^2 H$ .
5. Переріз циліндра площиною, паралельною до його осі — прямокутник. Дві сторони прямокутника — твірні циліндра, а дві інші — паралельні хорди основ. Осьовий переріз циліндра — переріз, який проходить через його вісь.



**Приклад 1.** Об'єм циліндра дорівнює  $8\pi\sqrt{5}$  см<sup>3</sup>, а його висота —  $2\sqrt{5}$  см. Знайти діагональ осьового перерізу.

А	Б	В	Г	Д
6 см	4 см	36 см	8 см	20 см

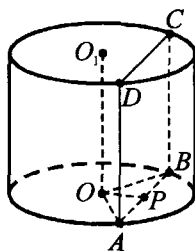
■ Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, одна сторона якого дорівнює діаметру основи, а інша — висоті циліндра.  $V_{цил.} = \pi R^2 H$ . Нехай перерізом є прямокутник  $ABCD$ , у якому  $AB = H = 2\sqrt{5}$  см,  $O_1B = R$ . Тоді одержимо:  $8\pi\sqrt{5} = \pi R^2 \cdot 2\sqrt{5}$ , звідки  $R^2 = 4$ ;  $R = 2$  (см).  $AD = 2R = 4$  (см). Проведемо діагональ  $BD$ . Із трикутника  $ABD$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) маємо:  $BD^2 = AB^2 + AD^2 = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 4^2} = \sqrt{20 + 16} = \sqrt{36} = 6$  (см).



Відповідь. А. ■

**Приклад 2.** Переріз циліндра, проведений паралельно до його осі, є квадратом і перетинає основу циліндра по хорді, яка віддалена від центра цієї основи на 1 см. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює  $2\sqrt{3}\pi$  см. Знайти площу перерізу у квадратних сантиметрах.

■ Нехай  $ABCD$  — заданий переріз циліндра  $OO_1$ . Проведемо  $OP \perp AB$ . Тоді  $AP = PB$  і  $OP = 1$  см.  $ABCD$  — квадрат.  $AB = AD = x$  (см).  $S_{б.} = 2\pi RH = 2\pi \cdot OA \cdot AD = 2\pi \cdot OA \cdot x$ . Маємо:  $2\pi \cdot OA \cdot x = 2\sqrt{3}\pi$ .  $OA \cdot x = \sqrt{3}$ .



Із трикутника  $OPA$ :  $OA = \sqrt{1 + AP^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2}$ . Отже,

$$\frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} \cdot x = \sqrt{3}; \quad x\sqrt{4 + x^2} = 2\sqrt{3}; \quad x^2(x^2 + 4) = 12; \quad x^4 + 4x^2 - 12 = 0;$$

$$x_1^2 = -6 \text{ — не підходить; } x_2^2 = 2. \quad S_{ABCD} = x^2 = 2 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 2. ■

Завдання 38.1–38.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

38.1. Знайти повну поверхню циліндра з радіусом 5 см і висотою 15 см.

А	Б	В	Г	Д
$375\pi \text{ см}^2$	$100\pi \text{ см}^2$	$400\pi \text{ см}^2$	$200\pi \text{ см}^2$	$150\pi \text{ см}^2$

38.2. Прямокутник зі сторонами  $a$  і  $b$  ( $a > b$ ) обертається навколо більшої сторони. Визначити об'єм тіла обертання.

А	Б	В	Г	Д
$2\pi a^2 b$	$\pi a^2 b$	$\pi ab^2$	$2\pi ab^2$	$4\pi a^2 b$

38.3. Діагональ осевого перерізу циліндра дорівнює  $l$  і утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Визначити радіус циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$2l \cos \alpha$	$l \sin \alpha$	$\frac{l \sin \alpha}{2}$	$l \cos \alpha$	$\frac{l \cos \alpha}{2}$

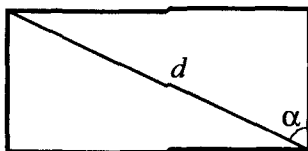
38.4. У циліндрі паралельно до його осі проведено площину на відстані 3 см від неї. Ця площина перетинає основу циліндра по хорді, яка дорівнює 8 см. Знайти радіус циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{73}$ см	5 см	$\sqrt{55}$ см	$\sqrt{7}$ см	$\sqrt{5}$ см

38.5. Осевим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 10 см. Знайти площу бічної поверхні циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$100 \text{ см}^2$	$50\pi \text{ см}^2$	$150\pi \text{ см}^2$	$100\pi \text{ см}^2$	$200\pi \text{ см}^2$

38.6. Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює  $d$  й утворює з висотою розгортки кут  $\alpha$ . Знайти радіус циліндра.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{d \sin \alpha}{2}$	$\frac{d \sin \alpha}{2\pi}$	$\frac{d \cos \alpha}{\pi}$	$\frac{d \sin \alpha}{\pi}$	$\frac{d \cos \alpha}{2}$

38.7. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює  $S$ . Визначити площу осевого перерізу.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{S}{4\pi}$	$\frac{S}{2}$	$\pi S$	$\frac{S}{2\pi}$	$\frac{S}{\pi}$

38.8. Відро циліндричної форми вміщує 10 л води. Іграшкове відро має розміри в 10 разів менші. Скільки літрів води вміщує іграшкове відро?

А	Б	В	Г	Д
1 л	0,1 л	0,01 л	0,001 л	0,0001 л

38.9. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Даний відрізок розміщений на відстані  $d$  від центра нижньої основи. Визначити висоту циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{d}{\sin \alpha}$	$\frac{d}{\cos \alpha}$	$d \sin \alpha$	$d \cos \alpha$	$d \operatorname{tg} \alpha$

38.10. Паралельно до осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу  $\alpha$ . Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом  $\beta$ . Визначити площу перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює  $R$ .

А	Б	В	Г	Д
$R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \beta$	$4R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$	$4R^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \beta$	$R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$	$4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$

38.11. Діагоналі осевого перерізу циліндра утворюють при перетині кут  $\varphi$ . Визначити площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює  $S$ .

А	Б	В	Г	Д
$4S \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$	$4S \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$	$4S \sin \frac{\varphi}{2}$	$4S \cos \frac{\varphi}{2}$	$\frac{4S}{\sin \frac{\varphi}{2}}$

38.12. Радіус основи циліндра  $R$ . Площина перетинає бічну поверхню циліндра, але не перетинає основи й утворює кут  $\alpha$  з площиною основи. Знайти площу перерізу циліндра цією площиною.

А	Б	В	Г	Д
$\pi R^2 \operatorname{tg} \alpha$	$\pi R^2 \cos \alpha$	$\pi R^2 \sin \alpha$	$\frac{\pi R^2}{\cos \alpha}$	$\frac{\pi R^2}{\sin \alpha}$

38.13. Осевий переріз циліндра — квадрат  $ABCD$  зі стороною  $2a$ . Визначити найкоротшу відстань між точками  $A$  і  $C$  по поверхні циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$2a^2 \sqrt{2}$	$4a^2 \sqrt{2}$	$a \sqrt{\pi^2 + 4}$	$\pi a$	$a \sqrt{\pi + 4}$

38.14. Через твірну циліндра проведено два взаємно перпендикулярні перерізи циліндра, площі яких дорівнюють  $60 \text{ см}^2$  і  $80 \text{ см}^2$ . Знайти площу осевого перерізу.

А	Б	В	Г	Д
$70 \text{ см}^2$	$80 \text{ см}^2$	$90 \text{ см}^2$	$100 \text{ см}^2$	$200 \text{ см}^2$

38.15. У куб, ребро якого дорівнює  $a$ , вписано циліндр. Визначити повну поверхню циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi a^2}{2}$	$\frac{3}{2} \pi a^2$	$\frac{5}{2} \pi a^2$	$3 \pi a^2$	$12 \pi a^2$

38.16. У циліндр вписано куб, об'єм якого дорівнює  $8 \text{ см}^3$ . Знайти об'єм циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$2\pi \text{ см}^3$	$4\pi \text{ см}^3$	$4\sqrt{2}\pi \text{ см}^3$	$8\pi \text{ см}^3$	$2\sqrt{2}\pi \text{ см}^3$

38.17. Знайти радіус циліндра, описаного навколо прямокутного паралелепіпеда зі сторонами основи  $9 \text{ см}$  та  $12 \text{ см}$  і висотою  $8 \text{ см}$ .

А	Б	В	Г	Д
$7,5 \text{ см}$	$15 \text{ см}$	$34 \text{ см}$	$8,5 \text{ см}$	$17 \text{ см}$

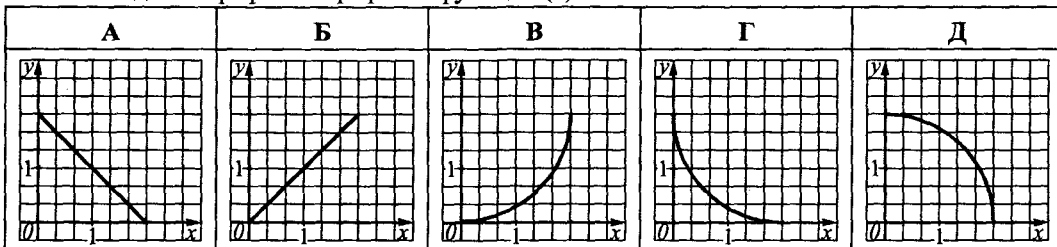
38.18. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює  $V$ . Визначити об'єм циліндра, вписаного в призму.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi V}{3\sqrt{3}}$	$\frac{4\pi V}{3\sqrt{3}}$	$\frac{\pi V}{12\sqrt{3}}$	$\frac{\pi V}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}\pi V$

38.19. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а у призму — циліндр. Знайти відношення об'ємів циліндрів.

А	Б	В	Г	Д
$1 : 8$	$1 : 4$	$1 : 2$	$3 : 4$	$3 : 8$

38.20. Дано циліндр з радіусом  $2$  і висотою  $0,5$ .  $S(x)$  — площа перерізу циліндра площиною, паралельною до його осі, де  $x$  — відстань від осі циліндра до площини перерізу. Який з наведених графіків є графіком функції  $S(x)$ ?



Завдання 38.21–38.23 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

38.21. Осевий переріз циліндра дорівнює  $S$ , а висота циліндра —  $H$ . Установити відповідність між величинами  $S$  і  $H$  (1–4) та об'ємом циліндра (А–Д).

- 1  $8 \text{ см}^2, 4 \text{ см}$
- 2  $6 \text{ см}^2, 3 \text{ см}$
- 3  $12 \text{ см}^2, 6 \text{ см}$
- 4  $10 \text{ см}^2, 5 \text{ см}$

- А  $3\pi \text{ см}^3$
- Б  $5\pi \text{ см}^3$
- В  $4\pi \text{ см}^3$
- Г  $8\pi \text{ см}^3$
- Д  $6\pi \text{ см}^3$

**38.22.** Площа основи циліндра дорівнює  $S$ , а діагоналі осьового перерізу утворюють при перетині кут  $\varphi$ . Установити відповідність між величинами  $S$  і  $\varphi$  (1–4) та площею бічної поверхні циліндра (А–Д).

1  $4 \text{ см}^2, 60^\circ$

2  $3 \text{ см}^2, 90^\circ$

3  $6 \text{ см}^2, 120^\circ$

4  $5 \text{ см}^2, 60^\circ$

А  $8\sqrt{3} \text{ см}^2$

Б  $16\sqrt{3} \text{ см}^2$

В  $20\sqrt{3} \text{ см}^2$

Г  $12 \text{ см}^2$

Д  $14 \text{ см}^2$

**38.23.** Установити відповідність між об'ємами правильних трикутних призм (1–4) та об'ємами вписаних у них циліндрів (А–Д).

1  $18 \text{ см}^3$

2  $9 \text{ см}^3$

3  $36 \text{ см}^3$

4  $27 \text{ см}^3$

А  $4\sqrt{3}\pi \text{ см}^3$

Б  $\sqrt{3}\pi \text{ см}^3$

В  $5\sqrt{3}\pi \text{ см}^3$

Г  $2\sqrt{3}\pi \text{ см}^3$

Д  $3\sqrt{3}\pi \text{ см}^3$

**Розв'яжіть завдання 38.24–38.33. Відповідь запишіть десятковим дробом.**

**38.24.** Площа основи циліндра відноситься до площі осьового перерізу як  $\sqrt{3}\pi : 4$ . Знайти у градусах кут між діагоналлю осьового перерізу циліндра і площиною основи.

**38.25.** Висота циліндра дорівнює 12, а радіус основи дорівнює 10. Циліндр перетнуто площиною, паралельною до його осі так, що в перерізі утворився квадрат. Знайти відстань від осі циліндра до січної площини.

**38.26.** Площина, паралельна до осі циліндра, відтинає від кола основи дугу  $120^\circ$ . Знайти площу перерізу, якщо висота дорівнює 10, а відстань від осі циліндра до січної площини дорівнює  $\sqrt{3}$ .

**38.27.** Кут між твірною циліндра і діагоналлю осьового перерізу дорівнює  $60^\circ$ , площа основи циліндра дорівнює  $\sqrt{3}$ . Визначити площу бічної поверхні циліндра.

**38.28.** Із квадрата, діагональ якого дорівнює  $2\sqrt{\pi}$ , згорнута бічна поверхня циліндра. Визначити площу основи циліндра.

**38.29.** Площина, паралельна до осі циліндра, відтинає від кола основи дугу  $60^\circ$ . Твірна циліндра дорівнює  $10\sqrt{3}$ , а відстань від осі до січної площини — 2. Знайти площу перерізу.

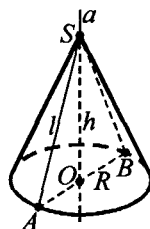
**38.30.** Знайти об'єм циліндра, якщо розгорткою його бічної поверхні є квадрат, сторона якого дорівнює  $\sqrt[3]{\pi}$ .

**38.31.** У циліндр вписано призму, основою якої є прямокутний трикутник з катетом 1 і прилеглим до нього кутом  $60^\circ$ . Визначити об'єм циліндра, якщо висота призми дорівнює  $\frac{1}{\pi}$ .

- 38.32. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 8 і 2. Висота призми дорівнює  $\frac{10}{\pi}$ . Знайти об'єм циліндра, вписаного в цю призму.
- 38.33. У циліндрі проведено два перерізи  $ABCD$  і  $ABEF$ , де  $AB$  — твірна циліндра. Площа кожного з цих перерізів дорівнює  $\frac{1}{2}$  площі осьового перерізу. Знайти у градусах кут між площинами  $ABC$  й  $ABE$ .

## ТЕМА 39. КОНУС

1.  $S$  — вершина, пряма  $a$  — вісь,  $SO = h$  — висота,  $OA = R$  — радіус основи,  $SA = l$  — твірна.
2. Переріз конуса площиною, яка проходить через вершину — рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого є твірними. Осьовий переріз конуса — переріз, який проходить через вісь конуса (трикутник  $ASB$ ).



3. Площа бічної поверхні:  $S = \pi Rl$ .
4. Площа повної поверхні конуса:  $S_{повн.} = S_{бічн.} + S_{осн.}$ .  $S_{повн.} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$ .
5. Об'єм конуса:  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ .

### 6. Зрізаний конус

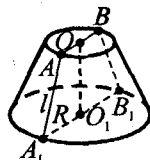
$AA_1 = l$  — твірна.  $O_1A_1 = R$ ,  $OA = r$ ,  $OO_1 = h$  — висота.

Осьовий переріз — рівнобічна трапеція  $A_1ABB_1$ .

Площа бічної поверхні:  $S = \pi(R + r)l$ .

Площа повної поверхні:  $S_{повн.} = S_{бічн.} + S_1 + S_2$ , де  $S_1$  і  $S_2$  — площі основ.  $S_{повн.} = \pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)$ .

Об'єм:  $V = \frac{1}{3} \pi h(R^2 + Rr + r^2)$ .



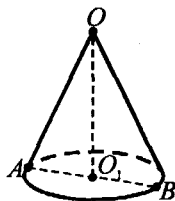
**Приклад 1.** Обчислити площу бічної поверхні конуса, висота якого дорівнює  $3\sqrt{3}$  см, а радіус основи удвічі менший від твірної.

А	Б	В	Г	Д
$18\pi \text{ см}^2$	$36\pi \text{ см}^2$	$54\pi \text{ см}^2$	$9\sqrt{3}\pi \text{ см}^2$	$48\pi \text{ см}^2$

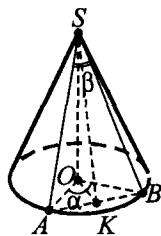
■ Нехай  $OO_1$  — конус, висота якого  $OO_1$  дорівнює  $3\sqrt{3}$  см. Радіус основи  $O_1A$  удвічі менший від твірної  $AO$ . Нехай  $AO_1 = x$ . Тоді з прямокутного трикутника  $AO_1O$  отримаємо:  $x^2 + (3\sqrt{3})^2 = (2x)^2$ ;  $4x^2 - x^2 = 27$ ;  $3x^2 = 27$ ;  $x^2 = 9$ ;  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -3$  — не підходить. Отже,  $AO_1 = 3$  (см).  $AO = 2x = 6$  (см). Маємо:  $S_б = \pi \cdot AO_1 \cdot AO = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi$  (см<sup>2</sup>).

Відповідь. А. ■

**Приклад 2.** Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає його основу радіуса  $R$  по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом  $\alpha$ , а з вершини — під кутом  $\beta$ . Визначити площу  $S$  перерізу. У відповідь записати значення виразу  $\frac{S}{\sqrt{3}}$ , якщо  $R = 2$  см,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .







■ Нехай  $S$  — вершина конуса,  $O$  — центр його основи,  $SO$  — висота,  $OA$  — радіус. Через вершину конуса проведемо площину, що перетинає його основу по хорді  $AB$ , яку видно з центра основи під кутом  $AOB$ , а з вершини — під кутом  $ASB$ . За умовою,  $\angle AOB = \alpha$ ,  $\angle ASB = \beta$ ,  $OA = R$ . Оскільки  $SA = SB$ , то трикутник  $ASB$  — рівнобедрений. У трикутнику  $ASB$  проведемо медіану  $SK$ . Вона буде висотою і бісектрисою. Отже,  $SK \perp AB$ ,  $\angle ASK = \angle BSK = \frac{1}{2} \angle ASB = \frac{\beta}{2}$ . З трикутника  $AOB$ , у якому  $AO = BO = R$ ,

$\angle AOB = \alpha$  за теоремою косинусів одержимо:  $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos \angle AOB$ ;

$$AB^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \alpha = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha = 2R^2(1 - \cos \alpha) = 2R^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$AB = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$ . З трикутника  $ASK$ , у якому  $\angle AKS = 90^\circ$ ,  $\angle ASK = \frac{\beta}{2}$ ,  $AK = \frac{1}{2} AB = R \sin \frac{\alpha}{2}$ ,

отримаємо:  $SK = AK \operatorname{ctg} \angle ASK = R \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$ .  $S_{\text{пер.}} = \frac{1}{2} AB \cdot SK$

$= \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \frac{\alpha}{2} \cdot R \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$ . Якщо  $R = 2$  см,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ , то

$$S_{\text{пер.}} = 2^2 \sin^2 45^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}. \text{ Тоді } \frac{S}{\sqrt{3}} = 2.$$

Відповідь. 2. ■

**Завдання 39.1–39.21** мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки **ОДНА ПРАВИЛЬНА**. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

**39.1.** Діаметр основи конуса 8 см, а його висота 3 см. Знайти твірну конуса.

А	Б	В	Г	Д
10 см	$\sqrt{73}$ см	2 см	10 см	5 см

**39.2.** Твірна конуса дорівнює  $l$ , а кут між твірною і висотою —  $\beta$ . Визначити площу бічної поверхні конуса.

А	Б	В	Г	Д
$\pi l^2 \cos \beta$	$\pi l^2 \sin \beta$	$2\pi l^2 \cos \beta$	$\frac{\pi l^2}{\sin \beta}$	$\frac{\pi l^2}{\cos \beta}$

**39.3.** Знайти площу повної поверхні конуса, твірна якого дорівнює 10 см, а радіус основи дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
$160\pi$ см <sup>2</sup>	$96\pi$ см <sup>2</sup>	$320\pi$ см <sup>2</sup>	$192$ см <sup>2</sup>	$48\pi$ см <sup>2</sup>

**39.4.** Прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см обертається навколо меншого катета. Обчислити об'єм утвореного тіла обертання.

А	Б	В	Г	Д
$16\pi$ см <sup>3</sup>	$12\pi$ см <sup>3</sup>	$36\pi$ см <sup>3</sup>	$48\pi$ см <sup>3</sup>	$4\pi$ см <sup>3</sup>

39.5. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник. Радіус основи конуса дорівнює 6. Знайти площу осьового перерізу конуса.

А	Б	В	Г	Д
72	9	12	18	36

39.6. Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а його твірна — 10 см. Знайти площу осьового перерізу конуса.

А	Б	В	Г	Д
$48 \text{ см}^2$	$24 \text{ см}^2$	$96 \text{ см}^2$	$60 \text{ см}^2$	$72 \text{ см}^2$

39.7. Розгортокою бічної поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює 9 см, а дуга —  $120^\circ$ . Знайти радіус конуса.

А	Б	В	Г	Д
4,5 см	1,5 см	6 см	3 см	9 см

39.8. Висоту конуса поділено на чотири рівні відрізки і через точки поділу паралельно основі проведено площини. Визначити площу найбільшого перерізу, якщо площа основи дорівнює  $S$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}S$	$\frac{3}{4}S$	$\frac{3}{16}S$	$\frac{1}{16}S$	$\frac{9}{16}S$

39.9. Хорду основи конуса, довжина якої  $a$ , видно з центра основи під кутом  $\alpha$ . Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом  $\beta$ . Визначити висоту конуса.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$	$\frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$	$\frac{a \operatorname{ctg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$	$\frac{a \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$	$\frac{a \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$

39.10. Радіус основи конуса дорівнює  $r$ . Визначити площу перерізу, який проходить через вершину конуса і хорду основи, яка стягує дугу  $60^\circ$ , якщо площина перерізу утворює з площиною основи конуса кут  $30^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{r^2}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{2}r^2$	$2r^2$	$r^2$	$\frac{r^2}{2}$

39.11. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 7 см і 15 см, а його твірна — 10 см. Знайти висоту конуса.

А	Б	В	Г	Д
3 см	$4\sqrt{21}$ см	$2\sqrt{21}$ см	6 см	12 см

39.12. Два конуси мають однакову площу бічної поверхні. Знайти відношення площ їх основ, якщо твірна першого конуса утричі більша від твірної другого.

А	Б	В	Г	Д
1 : 9	1 : 3	1 : 81	2 : 3	4 : 9

39.13. Осовим перерізом конуса є правильний трикутник зі стороною  $2r$ . Визначити площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює  $30^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$r^2$	$2r^2$	$3r^2$	$4r^2$	$\frac{r^2}{2}$

39.14. Найбільший кут між твірними конуса дорівнює  $60^\circ$ . Знайти відношення бічної поверхні до площі основи конуса.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

39.15. Відношення площі основи конуса до площі осового перерізу дорівнює  $\pi$ . Знайти кут нахилу твірної до основи.

А	Б	В	Г	Д
$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$

39.16. Півкруг згорнули в конус. Знайти кут при вершині осового перерізу цього конуса.

А	Б	В	Г	Д
$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$

39.17. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор з дугою  $\alpha$ . Знайти  $\alpha$ , якщо висота конуса дорівнює 4 см, а радіус основи — 3 см.

А	Б	В	Г	Д
$54^\circ$	$72^\circ$	$58^\circ$	$216^\circ$	$108^\circ$

39.18. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $a$ . Бічна грань утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Визначити об'єм конуса, вписаного в піраміду.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \alpha}{8}$	$\frac{\pi a^3 \operatorname{ctg} \alpha}{8}$	$\frac{\pi a^3 \sin \alpha}{8}$	$\frac{\pi a^3 \operatorname{ctg} \alpha}{24}$	$\frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \alpha}{24}$

39.19. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $b$  й утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Визначити об'єм конуса, описаного навколо піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\pi b^3 \operatorname{tg}^3 \alpha$	$\pi b^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$	$\pi b^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$	$\frac{\pi b^3}{3} \sin^2 \alpha \cos \alpha$	$\frac{\pi b^3}{3} \cos^2 \alpha \sin \alpha$

39.20. Трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см обертається навколо найбільшої сторони. Знайти площу поверхні обертання.

А	Б	В	Г	Д
$10\pi \text{ см}^2$	$12,6\pi \text{ см}^2$	$14,4\pi \text{ см}^2$	$16,8\pi \text{ см}^2$	$20,2\pi \text{ см}^2$

39.21. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють  $R$  і  $r$ , а твірна —  $l$ . Знайти твірну повного конуса, від якого відокремлений зрізаний конус.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{Rl}{r}$	$\frac{Rl}{R-r}$	$\frac{Rl}{R+r}$	$\frac{R+r}{Rl}$	$\frac{R-r}{Rl}$

Завдання 39.22–39.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

39.22. Установити відповідність між кутом при вершині осового перерізу конуса (1–4) та відношенням площ його бічної поверхні та основи (А–Д).

- |               |                         |
|---------------|-------------------------|
| 1 $30^\circ$  | А $\sqrt{2}$            |
| 2 $90^\circ$  | Б 2                     |
| 3 $60^\circ$  | В $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$  |
| 4 $120^\circ$ | Г $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$  |
|               | Д $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ |

39.23. Установити відповідність між довжинами висоти та радіуса основи (1–4) конуса і кутом (А–Д) сектора, який є розгорткою бічної поверхні конуса.

- |               |                      |
|---------------|----------------------|
| 1 4 см, 3 см  | А $\frac{8\pi}{5}$   |
| 2 3 см, 4 см  | Б $\frac{10\pi}{13}$ |
| 3 12 см, 5 см | В $\frac{24\pi}{13}$ |
| 4 24 см, 7 см | Г $\frac{6\pi}{5}$   |
|               | Д $\frac{14\pi}{25}$ |

39.24. Установити відповідність між кутом нахилу твірної конуса (1–4) та відношенням площ його основи та осового перерізу (А–Д).

- |              |                           |
|--------------|---------------------------|
| 1 $30^\circ$ | А $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ |
| 2 $45^\circ$ | Б $\pi\sqrt{3}$           |
| 3 $60^\circ$ | В $\pi(2+\sqrt{3})$       |
| 4 $15^\circ$ | Г $\pi$                   |
|              | Д $2\pi\sqrt{3}$          |

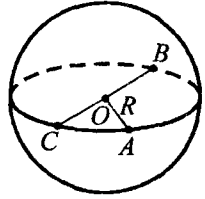
Розв'яжіть завдання 39.25–39.37. Відповідь запишіть десятковим дробом.

39.25. Осовим перерізом конуса є прямокутний трикутник. Знайти площу  $S$  бічної поверхні конуса, якщо радіус основи конуса дорівнює 5. У відповідь записати  $\frac{S\sqrt{2}}{\pi}$ .

- 39.26. Площа осевого перерізу конуса дорівнює 0,6. Висота конуса дорівнює 1,2. Обчислити площу  $S$  повної поверхні конуса. У відповідь записати  $\frac{S}{\pi}$ .
- 39.27. Твірна конуса утворює з його основою кут  $30^\circ$ , а площа перерізу, що проходить через твірні, кут між якими  $120^\circ$ , дорівнює  $\sqrt{3}$ . Знайти об'єм  $V$  конуса. У відповідь записати  $\frac{V}{\pi}$ .
- 39.28. Бічна поверхня конуса дорівнює  $10 \text{ см}^2$  і розгортається в сектор з кутом  $36^\circ$ . Знайти у квадратних сантиметрах повну поверхню конуса.
- 39.29. Висота конуса дорівнює 6. Розгорткою бічної поверхні цього конуса є сектор з центральним кутом  $120^\circ$ . Визначити об'єм  $V$  конуса. У відповідь записати  $\frac{V}{\pi}$ .
- 39.30. Знайти об'єм  $V$  тіла, яке утворюється при обертанні ромба зі стороною 1 і гострим кутом  $60^\circ$  навколо меншої діагоналі. У відповідь записати  $\frac{V}{\pi}$ .
- 39.31. Ромб, площа якого дорівнює  $Q$ , обертається навколо сторони. Визначити площу  $S$  поверхні одержаного тіла. У відповідь записати значення виразу  $\frac{S}{\pi Q}$ .
- 39.32. Рівнобічну трапецію, основи якої дорівнюють 8 і 18, обертають навколо більшої основи. Знайти площу  $S$  поверхні тіла обертання, якщо відомо, що в цю трапецію можна вписати коло. У відповідь записати  $\frac{S}{\pi}$ .
- 39.33. У конус із радіусом  $\sqrt{3}$  і висотою 3 вписано правильну трикутну призму, всі ребра якої рівні. Визначити ребро призми.
- 39.34. У конус із твірною  $\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$ , яка нахилена до площини його основи під кутом  $60^\circ$ , вписано кулю. Знайти об'єм кулі.
- 39.35. Визначити бічну поверхню конуса, вписаного в правильний тетраедр з ребром  $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$ .
- 39.36. Бічною поверхнею конус розгортається у чверть круга. Визначити повну поверхню цього конуса, якщо площа його осевого перерізу дорівнює  $\frac{\sqrt{15}}{\pi}$ .
- 39.37. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює  $60^\circ$ . Визначити площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди, якщо її висота дорівнює  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ .

## ТЕМА 40. КУЛЯ

1.  $O$  — центр,  $OA = R$  — радіус,  $CB = D$  — діаметр. Межа кулі — кульова поверхня або сфера.

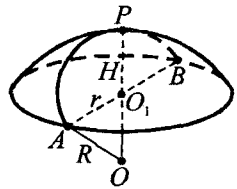


2. Діаметральна площина — площина, яка проходить через центр кулі. Переріз кулі діаметральною площиною — великий круг, а переріз сфери — велике коло. Будь-який переріз кулі площиною є кругом. Центр цього круга — основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.

3. Площа сфери:  $S = 4\pi R^2$ . Площі двох сфер відносяться як квадрати їх радіусів або діаметрів.

4. Об'єм кулі:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Об'єми двох куль відносяться як куби їх радіусів або діаметрів.

5. Кульовий сегмент — частина кулі, яка відтинається від неї площиною.  $OA = R$  — радіус кулі,  $O_1A = r$  — радіус основи сегмента,  $O_1P = H$  — висота сегмента.



$$S_{\text{бiчн.}} = 2\pi RH.$$

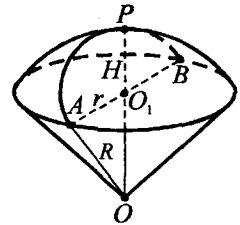
$$V = \pi H \left( R - \frac{1}{3}H \right); \quad V = \frac{1}{3}\pi H^2 (3R - H).$$

6. Кульовий сектор складається з кульового сегмента та відповідного конуса.

$R = OA$  — радіус кулі,  $H = O_1P$  — висота сегмента,

$$S = \pi R \left( 2H + \sqrt{2RH - H^2} \right).$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$



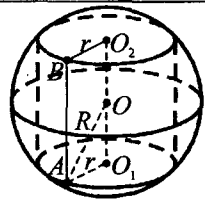
**Приклад 1.** Навколо циліндра описана куля. Площа основи циліндра дорівнює  $64\pi \text{ см}^2$ , а його висота — 30 см. Знайти радіус кулі.

А	Б	В	Г	Д
15 см	3 см	9 см	17 см	20 см

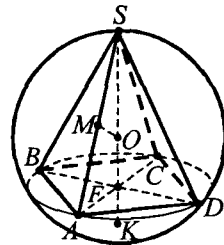
■ Нехай циліндр, у якого круг  $(O_1; r)$  і  $(O_2; r)$  — основи,  $S_{\text{осн.}} = 64\pi \text{ см}^2$ , вписано в кулю  $(O; R)$ ,  $R = OA$ . Оскільки площа основи циліндра дорівнює  $64\pi \text{ см}^2$ , то  $\pi r^2 = 64\pi$ ;  $r = 8$  (см). Із трикутника  $AO_1O$  ( $\angle O_1 = 90^\circ$ ), у якому  $AO_1 = r = 8$  см,  $OO_1 = 30:2 = 15$  (см), за теоремою Піфагора маємо:  $OA^2 = OO_1^2 + AO_1^2$ , звідки  $OA = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$  (см).

Відповідь. Г. ■

**Приклад 2.** У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює  $a$ . Визначити площу поверхні кулі, якщо бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом  $\alpha$ . У відповідь записати значення виразу  $\frac{S}{\pi}$ , якщо  $a = 4$  см,  $\alpha = 45^\circ$



■ Нехай  $SABCD$  — задана правильна чотирикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює  $a$ . Проведемо діагоналі основи  $AC$  і  $BD$ . Вони перетинаються в точці  $F$ . Оскільки піраміда правильна, то її вершина — точка  $S$  — проектується у центр кола, описаного навколо основи піраміди — точку  $F$ . Тоді висота піраміди проходить через цю точку. Отже,  $SF$  — перпендикуляр до площини основи,  $SA$  — похила,  $FA$  — її проекція. Кут  $SAF$  — кут нахилу бічного ребра до площини основи. За умовою,  $\angle SAF = \alpha$ . У трикутнику  $SFA$  побудуємо серединний перпендикуляр  $MO$  до гіпотенузи  $SA$ . Тоді  $SO = AO$ . Аналогічно можна довести, що точка  $O$  рівновіддалена від інших вершин піраміди, тобто є центром кулі, описаної навколо даної піраміди. Тому  $SO = AO = R$ . Площина, проведена через діагональ основи  $AC$  і вершину  $S$  піраміди, перетинає кулю по великому колу, описаному навколо діагонального перерізу піраміди — трикутнику  $ASC$ , у якому  $\angle SAC = \angle SCA = \alpha$ ,  $\angle ASC = 180^\circ - 2\alpha$ . За наслідком з теореми синусів  $\frac{AC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = 2R$ ;  $R = \frac{AC}{2\sin 2\alpha}$ . Із трикутника  $ACD$  ( $\angle D = 90^\circ$ ) за



теоремою Піфагора одержимо:  $AC^2 = AD^2 + CD^2$ ;  $AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ ;  $AC = a\sqrt{2}$ . Тоді

$R = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha}$ . Площу поверхні кулі можна обчислити за формулою  $S = 4\pi R^2$ .

$S = 4\pi \left( \frac{a\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha} \right)^2 = \frac{2\pi a^2}{\sin^2 2\alpha}$ . Якщо  $a = 4$  см,  $\alpha = 45^\circ$ , то  $S = \frac{2\pi \cdot 4^2}{\sin^2(2 \cdot 45^\circ)} = 32\pi$ . Тоді

$$\frac{S}{\pi} = \frac{32\pi}{\pi} = 32.$$

Відповідь. 32. ■

**Завдання 40.1–40.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.**

**40.1.** Кулю, радіус якої 5 см, перетнуто площиною, що розміщена на відстані 3 см від центра. Знайти площу перерізу.

А	Б	В	Г	Д
$4\pi$ см <sup>2</sup>	$8\pi$ см <sup>2</sup>	$12\pi$ см <sup>2</sup>	$16\pi$ см <sup>2</sup>	$32\pi$ см <sup>2</sup>

**40.2.** Діаметр кулі дорівнює 6 см. Точка А лежить на дотичній площині на відстані 4 см від точки дотику. Знайти відстань від точки А до поверхні кулі.

А	Б	В	Г	Д
0,5 см	1 см	2 см	3 см	4 см

**40.3.** Площа великого круга кулі дорівнює  $4\pi$  см<sup>2</sup>. Знайти об'єм кулі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{64}{3}\pi$ см <sup>3</sup>	$16\pi$ см <sup>3</sup>	$32\pi$ см <sup>3</sup>	$\frac{32}{3}\pi$ см <sup>3</sup>	$64\pi$ см <sup>3</sup>

**40.4.** Діаметр кулі дорівнює 6 см. Знайти площу поверхні кулі.

А	Б	В	Г	Д
$18\pi$ см <sup>2</sup>	$36\pi$ см <sup>2</sup>	$54\pi$ см <sup>2</sup>	$72\pi$ см <sup>2</sup>	$108\pi$ см <sup>2</sup>

40.5. Площина перетинає сферу. Довжина лінії перетину дорівнює 10π см, а діаметр сфери, проведений в одну з точок лінії перетину, утворює з площиною перетину кут 60°. Знайти площу поверхні сфери.

А	Б	В	Г	Д
40π см <sup>2</sup>	100π см <sup>2</sup>	25π см <sup>2</sup>	1600π см <sup>2</sup>	400π см <sup>2</sup>

40.6. Відстань між рівновеликими паралельними перерізами кулі, радіус якої становить 10 см, дорівнює 12 см. Знайти площу кожного з цих перерізів.

А	Б	В	Г	Д
22π см <sup>2</sup>	16π см <sup>2</sup>	64π см <sup>2</sup>	128π см <sup>2</sup>	100π см <sup>2</sup>

40.7. Об'єми двох куль відносяться як 27 : 125. Як відносяться площі їх поверхонь?

А	Б	В	Г	Д
9 : 25	3 : 5	$\sqrt{27} : \sqrt{125}$	27 : 125	$\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{125}$

40.8. Діаметр одного кавуна вдвічі більший від діаметра іншого. У скільки разів перший кавун важчий від другого?

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	8	16

40.9. М'яч, площа повної поверхні якого дорівнює 400π см<sup>2</sup>, зробив один повний оберт по прямій. Знайти довжину шляху, яку він при цьому подолав.

А	Б	В	Г	Д
10π см	20π см	30π см	40π см	60π см

40.10. На поверхні кулі радіуса  $r$  дано дві точки, відстань між якими дорівнює радіусу кулі. Визначити найкоротшу відстань на поверхні кулі між цими точками.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2\pi}{3r}$	$\frac{\pi r}{12}$	$\frac{\pi r}{6}$	$\frac{\pi r}{3}$	$\frac{\pi r}{4}$

40.11. Металеву кулю переплавлено на 8 рівних куль. Як змінилася при цьому загальна поверхня?

А	Б	В	Г	Д
Збільшилася у 4 рази	збільшилася удвічі	зменшилася удвічі	зменшилася у 8 разів	не змінилася

40.12. Дві рівні кулі радіуса  $R$  розміщені так, що центр однієї з них лежить на поверхні іншої. Знайти радіус кола, по якому перетинаються їхні поверхні.

А	Б	В	Г	Д
$R$	$\frac{R}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}R$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}R$

40.13. Вершини трикутника лежать на сфері радіуса 13 см. Знайти відстань від центра сфери до площини трикутника, якщо сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см.

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{11}$ см	$\sqrt{165}$ см	6 см	24 см	12 см



40.14. Вершини прямокутника лежать на сфері радіуса 10 см. Знайти відстань від центра сфери до площини прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 16 см.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{41}$ см	6 см	3 см	7 см	5 см

40.15. Через точку, що лежить на поверхні сфери, проведено дві взаємоперпендикулярні площини, які перетинають сферу по колах з радіусами  $r_1$  і  $r_2$ . Визначити площу поверхні сфери.

А	Б	В	Г	Д
$\pi(r_1^2 + r_2^2)$	$4\pi(r_1^2 + r_2^2)$	$\frac{\pi(r_1^2 + r_2^2)}{4}$	$2\pi(r_1^2 + r_2^2)$	$\frac{\pi(r_1^2 + r_2^2)}{2}$

40.16. Через точку, що не лежить на сфері, проведено дві площини, які дотикаються до сфери. Знайти відстань від центра сфери до лінії перетину площин, якщо кут між площинами дорівнює  $60^\circ$ , а площа поверхні сфери —  $32\pi$  см<sup>2</sup>.

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{2}$ см	$8\sqrt{2}$ см	4 см	$2\sqrt{2}$ см	$16\sqrt{2}$ см

40.17. Знайти відношення площі поверхні куба і вписаної в нього кулі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{\pi}$	$\frac{3}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{6}{\pi}$	$\frac{12}{\pi}$

40.18. У циліндр вписано кулю. Визначити об'єм кулі, якщо об'єм циліндра дорівнює  $V$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}V$	$\frac{1}{3}V$	$\frac{1}{6}V$	$\frac{5}{6}V$	$\frac{3}{4}V$

40.19. Знайти відношення об'ємів кулі та вписаного в неї куба.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$

40.20. Знайти відношення площі поверхні кулі описаної навколо рівностороннього конуса, до площі поверхні кулі, вписаної в цей конус.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	6	8

40.21. Навколо кулі описана правильна трикутна призма. Знайти відношення об'ємів призми і кулі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{9\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{9\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

Завдання 40.22–40.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

40.22. Установити відповідність між геометричними тілами (1–4) та формулами для відшукання їх об'ємів (А–Д).

- 1 Циліндр
- 2 Куля
- 3 Конус
- 4 Піраміда

А  $\pi r^2 H$

Б  $\pi r l$

В  $\frac{1}{3} \pi r^2 H$

Г  $\frac{4}{3} \pi r^3$

Д  $\frac{1}{3} S_{\text{ос.}} \cdot H$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

40.23. Установити відповідність між геометричними тілами (1–4) та формулами для відшукання їх поверхонь (А–Д).

- 1 Циліндр
- 2 Куля
- 3 Конус
- 4 Правильна чотирикутна піраміда

А  $\pi r(r+l)$

Б  $4\pi r^2$

В  $a(a+2l)$

Г  $2\pi r(r+l)$

Д  $2\pi r l$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

40.24. Установити відповідність між відношеннями об'ємів двох куль (1–4) та відношеннями площ їх поверхонь (А–Д).

- 1 27 : 125
- 2 8 : 27
- 3 27 : 64
- 4 125 : 64

А 4 : 9

Б 9 : 16

В 9 : 25

Г 49 : 64

Д 25 : 16

40.25. Дві площини, які перетинаються під кутом  $60^\circ$ , дотикаються до сфери. Установити відповідність між площею поверхні сфери (1–4) та відстанню від її центра до лінії перетин цих площин (А–Д).

- 1  $36\pi \text{ см}^2$
- 2  $12\pi \text{ см}^2$
- 3  $48\pi \text{ см}^2$
- 4  $192\pi \text{ см}^2$

А  $16\sqrt{3} \text{ см}$

Б 6 см

В  $2\sqrt{3} \text{ см}$

Г  $5\sqrt{3} \text{ см}$

Д  $4\sqrt{3} \text{ см}$

40.26. Кулю радіуса  $r$  вписали в конус висотою  $H$  і радіусом основи  $R$ . Установити відповідність між висотою  $H$  і радіусом основи  $R$  конуса (1–4) та радіусом  $r$  кулі (А–Д).

- 1 4 см, 3 см
- 2 16 см, 12 см
- 3 24 см, 7 см
- 4 8 см, 6 см

- А 6 см
- Б 3 см
- В 1,5 см
- Г  $\frac{21}{4}$  см
- Д 3 см

Розв'яжіть завдання 40.27–40.36. Відповідь запишіть десятковим дробом.

40.27. Перерізи кулі двома паралельними площинами, між якими лежить центр кулі, мають площі  $144\pi$  см<sup>2</sup> і  $25\pi$  см<sup>2</sup>. Відстань між площинами дорівнює 17 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу  $S$  поверхні кулі. У відповідь записати  $\frac{S}{\pi}$ .

40.28. Перерізи сфери двома паралельними площинами мають довжини  $10\pi$  см і  $24\pi$  см. Знайти у квадратних сантиметрах площу  $S$  поверхні сфери, якщо відстань між площинами дорівнює 7 см і центри перерізів лежать на одному радіусі сфери. У відповідь записати  $\frac{S}{\pi}$ .

40.29. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 6, 8 і 10. Висота призми дорівнює 24. Знайти радіус кулі, описаної навколо призми.

40.30. Сторона основи і висота правильної чотирикутної піраміди дорівнюють 4. Знайти радіус описаної навколо піраміди кулі.

40.31. Навколо конуса з радіусом основи 9 і висотою 3 описано кулю. Визначити радіус цієї кулі.

40.32. У пряму чотирикутну призму, основою якої є ромб з діагоналями 3 і 4, вписано кулю. Визначити радіус кулі.

40.33. У циліндр, об'єм якого дорівнює  $16\pi$ , вписано кулю. Визначити радіус кулі.

40.34. Висота конуса дорівнює 8 см, а його твірна дорівнює 10 см. Знайти у сантиметрах радіус кулі, вписаної в конус.

40.35. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 6 см. Одне з бічних ребер піраміди є перпендикулярним до площини основи і дорівнює 4 см. Знайти у сантиметрах радіус кулі, описаної навколо піраміди.

40.36. Ребро правильного тетраедра дорівнює  $3\sqrt{6}$ . Визначити радіус сфери, яка дотикається до бічних граней тетраедра, якщо центр цієї сфери лежить на основі тетраедра.

## ТЕМА 41. КООРДИНАТИ

### Координати на площині

Нехай задано точки  $A(x_1; y_1)$  і  $B(x_2; y_2)$ .

1. Координати точки  $C$  — середини відрізка  $AB$ :  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ;  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .
2. Відстань між точками  $A$  та  $B$ :  $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .
3. Рівняння прямої:  $ax + by + c = 0$ .
4. Рівняння кола  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ , де  $(a; b)$  — координати центра,  $R$  — радіус кола.  $x^2 + y^2 = R^2$  — рівняння кола з центром у початку координат.
5. Взаємне розміщення двох прямих  $y_1 = k_1x + b_1$  та  $y_2 = k_2x + b_2$ . Якщо  $k_1 = k_2$  і  $b_1 \neq b_2$ , то прямі паралельні; якщо  $k_1 \cdot k_2 = -1$ , то прямі перпендикулярні; якщо  $k_1 \neq k_2$ , то прямі перетинаються.

### Координати у просторі

Нехай задано точки  $A(x_1; y_1; z_1)$  і  $B(x_2; y_2; z_2)$ .

1. Координати точки  $C$  — середини відрізка  $AB$ :  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ;  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ;  $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ .
2. Відстань між точками  $A$  та  $B$ :  $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ . Відстань від точки  $M(x; y; z)$  до координатних площин  $xOy$ ,  $xOz$ ,  $yOz$  відповідно дорівнює  $|z|$ ,  $|y|$ ,  $|x|$ . Відстань від точки  $M(x; y; z)$  до початку координат дорівнює  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
3. Рівняння сфери  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ , де  $(a; b; c)$  — координати центра,  $R$  — радіус кола.  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  — рівняння сфери з центром у початку координат.
4. Формули паралельного перенесення:  $x' = x + a$ ;  $y' = y + b$ ;  $z' = z + c$ , де  $a, b, c$  — деякі числа.

**Приклад 1.** Коло з центром  $C(-4; 5)$  дотикається до осі абсцис. Знайти координати точки його перетину з віссю ординат.

А	Б	В	Г	Д
$(-2; 0), (-8; 0)$	$(0; 2), (0; 8)$	$(0; -2), (0; -8)$	$(2; 3), (8; 0)$	$(2; 0), (8; 0)$

■ Оскільки коло з центром  $C(-4; 5)$  дотикається до осі абсцис, то  $R = 5$ . Рівняння кола:  $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$ . Точки, в яких коло перетинає вісь ординат, мають абсцису, яка дорівнює нулю. Маємо:  $(0 + 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$ ;  $y^2 - 10y + 16 = 0$ ;  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 8$ . Отже,  $(0; 2)$  і  $(0; 8)$  — точки перетину кола з віссю ординат.

Відповідь. Б. ■

**Приклад 2.** Довести, що трикутник з вершинами  $A(2; 0; 5)$ ,  $B(3; 4; 0)$  і  $C(2; 4; 0)$  прямокутний. Знайти координати центра кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ . У відповідь записати суму координат центра.

$$\blacksquare AB = \sqrt{(3-2)^2 + (4-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{42}; \quad BC = \sqrt{(3-2)^2 + (4-4)^2 + (0-0)^2} = 1;$$

$CA = \sqrt{(2-2)^2 + (4-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{41}$ .  $(\sqrt{42})^2 = (\sqrt{41})^2 + 1^2$ ;  $42 = 42$ . Отже, за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник  $ABC$  прямокутний з гіпотенузою  $AB$ .

Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є серединою гіпотенузи. Її координати:  $x = \frac{2+3}{2} = 2,5$ ;  $y = \frac{0+4}{2} = 2$ ;  $z = \frac{0+5}{2} = 2,5$ . Отже, точка  $(2,5; 2; 2,5)$  — центр кола. Тоді  $2,5 + 2 + 2,5 = 7$ .

Відповідь. 7.  $\blacksquare$

**Завдання 41.1–41.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.**

**41.1.** Точки  $A(2; -4; -8)$  і  $B(10; -20; 6)$  симетричні відносно точки  $C$ . Знайти координати точки  $C$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-10; 20; -6)$	$(3; -4; -0,5)$	$(12; -24; -1)$	$(6; -12; -1)$	$(-2; 4; -8)$

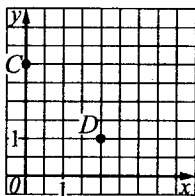
**41.2.** Скласти рівняння кола, в якого відрізок  $MN$  — діаметр і  $M(7; 6)$ ,  $N(11; 9)$ .

А	Б	В	Г	Д
$(x-7)^2 + (y-6)^2 = 6,25$	$(x+9)^2 + (y+7,5)^2 = 6,25$	$(x-9)^2 + (y-7,5)^2 = 6,25$	$(x-9)^2 + (y-7,5)^2 = 25$	$(x+9)^2 + (y+7,5)^2 = 9$

**41.3.** Дано трикутник  $ABC$ , вершини якого мають координати  $A(-2; 6)$ ,  $B(-2; -2)$  і  $C(4; -2)$ . Знайти довжину медіани  $BM$ .

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

**41.4.** Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок  $C(0; 3)$  і  $D(2; 1)$ .



А	Б	В	Г	Д
$y = x + 3$	$y = x + 1$	$y = x + 2$	$y = -x + 1$	$y = 2$

**41.5.** Знайти координати точки, яка симетрична точці  $A(1; 2; 3)$  відносно площини  $xy$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-1; -2; -3)$	$(-1; -2; 3)$	$(1; -2; 3)$	$(-1; 2; 3)$	$(1; 2; -3)$

**41.6.** Знайти координати точки, яка симетрична точці  $M(10; 20; 30)$  відносно осі аплікату.

А	Б	В	Г	Д
$(-10; -20; 30)$	$(10; 20; 30)$	$(10; 20; 0)$	$(-10; -20; -30)$	$(10; 20; -30)$

41.7. При паралельному перенесенні точка  $A(1; 2; 6)$  переходить у точку  $A_1(6; 7; 0)$ . Вказати координати точки, у яку при цьому переходить точка  $B(7; 9; 1)$ .

А	Б	В	Г	Д
$(21; 31,5; 0)$	$(2; 4; 7)$	$(12; 14; -5)$	$(12; 14; 7)$	$(-12; -14; 5)$

41.8. Знайти відстань від точки  $M(5; 4; 12)$  до осі ординат.

А	Б	В	Г	Д
5	4	12	13	21

41.9. Знайти відстань від точки  $P(3; -6; 8)$  до площини  $yz$ .

А	Б	В	Г	Д
3	4	6	8	10

41.10. Скласти рівняння сфери, яка проходить через початок координат із центром у точці  $S(-1; 2; -3)$ .

А	Б	В	Г	Д
$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14$	$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 2$	$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 14$	$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 2$	$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 10$

41.11. Вказати рівняння кола, яке на площині симетричне до кола  $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 9$  відносно осі  $Oy$ .

А	Б	В	Г	Д
$(x+5)^2 + (y-4)^2 = 9$	$(x-5)^2 + (y+4)^2 = 9$	$(x+4)^2 + (y-5)^2 = 9$	$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$	$(x+4)^2 + (y+5)^2 = 9$

41.12. Скласти рівняння кола з центром у точці  $C(5; -2)$ , яка дотикається до осі ординат.

А	Б	В	Г	Д
$(x+5)^2 + (y+2)^2 = 25$	$(x+5)^2 + (y-2)^2 = 4$	$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4$	$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 5$	$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$

41.13. Скласти рівняння сфери з центром у точці  $A(-1; 3; 2)$ , яка дотикається до площини  $xy$ .

А	Б	В	Г	Д
$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 10$	$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4$	$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 13$	$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 2$	$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 2$

41.14. Знайти координати центра кола  $x^2 - 4x + y^2 + 10y + 20 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(2; 5)$	$(-2; 5)$	$(-2; -5)$	$(2; -5)$	$(4; -10)$

41.15. Знайти радіус сфери  $x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 6z - 6 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

41.16. Дано  $ABCD$  — паралелограм.  $A(-4; 1; 5)$ ,  $B(-5; 4; 2)$ ,  $C(3; -2; -1)$ . Знайти координати вершини  $D$ .

А	Б	В	Г	Д
(12; 7; -8)	(6; -3; -6)	(-6; 3; 6)	(-12; 7; 8)	(4; -5; 2)

41.17. Дано  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб.  $A(7; 0; 0)$ ,  $B(5; 0; 0)$ ,  $C_1(5; 2; 2)$ . Знайти координати вершини  $D_1$ .

А	Б	В	Г	Д
(7; 5; 2)	(5; 2; 0)	(2; 2; 2)	(7; 2; 2)	(7; 0; 2)

41.18. Дано трикутник  $ABC$  з вершинами  $A(2; 2; -4)$ ,  $B(2; -1; -1)$ ,  $C(3; -1; -2)$ . Знайти зовнішній кут при вершині  $B$ .

А	Б	В	Г	Д
$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	Інша відповідь

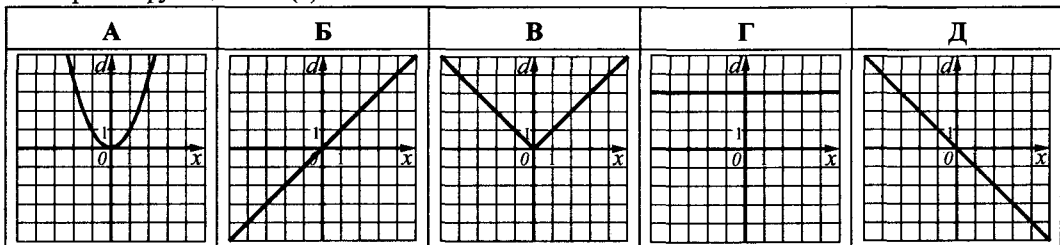
41.19. Точки  $A(2; 4)$  і  $C(5; 8)$  є вершинами квадрата  $ABCD$ . Знайти площу цього квадрата.

А	Б	В	Г	Д
2,5	5	12,5	25	20

41.20. Точки  $A(-1; 0; 2)$  і  $B(0; 1; 1)$  є вершинами правильного трикутника. Знайти площу цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{4}$	$3\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	3	9

41.21.  $d(x)$  — відстань від точки  $M(x; 0; 0)$  до площини  $yz$ . Який з наведених графіків є графіком функції  $d = d(x)$ ?



Завдання 41.22–41.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

41.22. При паралельному перенесенні точка  $A(1; 3; 2)$  переходить у точку  $A'(3; 0; 1)$ . Установити відповідність між точками (1–4) та точками (А–Д), утвореними при цьому паралельному перенесенні.

- 1  $M_1(1; 3; 0)$
- 2  $M_2(6; 8; -1)$
- 3  $M_3(0; 1; -2)$
- 4  $M_4(-1; 2; 3)$

- А  $M'(2; -2; -3)$
- Б  $M'(8; 5; -2)$
- В  $M'(3; 0; -1)$
- Г  $M'(2; -3; -1)$
- Д  $M'(1; -1; 2)$

41.23. Установити відповідність між центрами і радіусами сфер (1–4) та їх рівняннями (А–Д).

1  $C_1(1; 2; 0); 4$

А  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 1 = 0$

2  $C_2(3; 0; -1); 3$

Б  $x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 2z - 8 = 0$

3  $C_3(0; 4; 1); 5$

В  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$

4  $C_4(2; 3; 1); 10$

Г  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 11 = 0$

Д  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z - 86 = 0$

41.24. Установити відповідність між парами точок (1–4), та відстанями між цими точками (А–Д).

1  $M_1(1; 3; 4), N_1(2; 1; 2)$

А 3

2  $M_2(3; 5; 1), N_2(0; 1; 1)$

Б 13

3  $M_3(-2; 3; 4), N_3(6; 3; -2)$

В 5

4  $M_4(1; -2; 5), N_4(1; 10; 0)$

Г 7

Д 10

Розв'яжіть завдання 41.25–41.31. Відповідь запишіть десятковим дробом.

41.25. На осі ординат знайти ординату точки, рівновіддаленої від точки  $A(-4; 2)$  і початку координат.

41.26. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M(-2; 5)$  й утворює з додатним напрямом осі абсцис кут  $45^\circ$ . У відповідь записати абсцису точки перетину прямої з віссю абсцис.

41.27. Знайти площу трикутника, обмеженого осями координат і прямою  $4x + 3y = 24$ .

41.28. Знайти квадрат довжини медіани  $AA_1$  трикутника  $ABC$ , якщо  $A(3; -2; 1)$ ,  $B(3; 1; 5)$  і  $C(4; 0; 3)$ .

41.29. Знайти радіус сфери заданої рівнянням  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ .

41.30. Скласти рівняння кола з центром на осі ординат, яке проходить через точки  $A(-3; 0)$ ,  $B(0; 9)$ . У відповідь записати довжину радіуса кола.

41.31. Точка  $M(2; 6; 3)$  — середина відрізка, кінці якого лежать на осі  $x$  і на площині  $yz$ . Знайти довжину відрізка.



## ТЕМА 42. ВЕКТОРИ

На площині	У просторі
<p>1. Координати вектора.  <math>A(x_1; y_1), B(x_2; y_2);</math>  <math>\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1) = \overline{AB}(a_1; a_2),</math> де  <math>a_1 = x_2 - x_1; a_2 = y_2 - y_1</math></p>	<p><math>A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2);</math>  <math>\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = \overline{AB}(a_1; a_2; a_3),</math>  де <math>a_1 = x_2 - x_1; a_2 = y_2 - y_1; a_3 = z_2 - z_1</math></p>
<p>2. Рівність векторів.  <math>\vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(b_1; b_2),</math> якщо <math>a_1 = b_1,</math>  <math>a_2 = b_2.</math></p>	<p><math>\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3),</math> якщо <math>a_1 = b_1,</math>  <math>a_2 = b_2, a_3 = b_3</math></p>
Рівні вектори співнапрямлені і мають однакові довжини.	
<p>3. Колінеарні вектори лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Якщо вектори <math>\vec{a}(a_1; a_2)</math> і <math>\vec{b}(b_1; b_2)</math> колінеарні, то  <math>\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k.</math></p>	<p><math>\vec{a}(a_1; a_2; a_3)</math> і <math>\vec{b}(b_1; b_2; b_3)</math> колінеарні, то  <math>\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k.</math></p>
Вектори протилежно напрямлені, якщо $k < 0,$ і однаково напрямлені, якщо $k > 0.$	
<p>4. Сумою векторів <math>\vec{a}(a_1; a_2)</math> і <math>\vec{b}(b_1; b_2)</math> є вектор <math>\vec{c}(c_1; c_2),</math> такий що <math>c_1 = a_1 + b_1,</math>  <math>c_2 = a_2 + b_2,</math> тобто  <math>(a_1; a_2) + (b_1; b_2) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2).</math></p>	<p>Сумою векторів <math>\vec{a}(a_1; a_2; a_3)</math> і <math>\vec{b}(b_1; b_2; b_3)</math> є вектор <math>\vec{c}(c_1; c_2; c_3),</math> такий-  що <math>c_1 = a_1 + b_1, c_2 = a_2 + b_2, c_3 = a_3 + b_3,</math>  тобто  <math>(a_1; a_2; a_3) + (b_1; b_2; b_3) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3).</math></p>
<p>5. Різниця векторів:  <math>(a_1; a_2) - (b_1; b_2) = (a_1 - b_1; a_2 - b_2).</math></p>	<p><math>(a_1; a_2; a_3) - (b_1; b_2; b_3) = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3).</math></p>
<p>6. Модуль (довжина) вектора <math>\vec{a}(a_1; a_2)</math>  <math> \vec{a}  = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.</math></p>	<p>Модуль (довжина) вектора <math>\vec{a}(a_1; a_2; a_3)</math>  <math> \vec{a}  = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.</math></p>
<p>7. Множення вектора на число:  <math>(a_1; a_2) \cdot \lambda = (\lambda a_1; \lambda a_2).</math></p>	<p><math>(a_1; a_2; a_3) \cdot \lambda = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3).</math></p>
<p>8. Скалярний добуток векторів  <math>\vec{a}(a_1; a_2)</math> і <math>\vec{b}(b_1; b_2):</math>  <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2</math></p>	<p><math>\vec{a}(a_1; a_2; a_3)</math> і <math>\vec{b}(b_1; b_2; b_3):</math>  <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3</math></p>
Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cdot \cos \varphi,$ де $\varphi$ — кут між векторами.	
<p>9. Косинус кута між ненульовими векторами:  <math>\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} } = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}},</math></p>	<p><math>\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} } = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}</math></p>

10. Властивість і ознака перпендикулярних ненульових векторів. Якщо  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  і навпаки, якщо  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , то  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

**Приклад 1.** За якого значення  $t$  вектори  $\vec{a}(2; -4)$  і  $\vec{b}(t; 2t-1,5)$  будуть перпендикулярними?

А	Б	В	Г	Д
1	-1	2	1,5	-6

■  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , якщо  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .  $2t - 4(2t - 1,5) = 0$ ;  $2t - 8t + 6 = 0$ ;  $-6t = -6$ ;  $t = 1$ .

Відповідь. А. ■

**Приклад 2.** За якого значення  $t$  вектори  $\vec{a}(8; t; 6)$  і  $\vec{d}(4; 2; 3)$  будуть перпендикулярними?

А	Б	В	Г	Д
-25	25	-5	5	-23

■ Не нульові вектори  $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$  і  $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$  будуть перпендикулярними лише тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто коли  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  або  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ . Для векторів  $\vec{a}(8; t; 6)$  і  $\vec{d}(4; 2; 3)$  отримаємо:  $8 \cdot 4 + t \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 0$ ;  $2t + 50 = 0$ ;  $t = -25$ .

Відповідь. А. ■

**Приклад 3.** Знайти у градусах зовнішній кут трикутника  $AMK$  при вершині  $A$ , якщо  $A(2; -2; -3)$ ,  $M(4; -2; -1)$ ,  $K(2; 2; 1)$ .

■ Кут  $KAM$  — кут між векторами  $\vec{AK}$  і  $\vec{AM}$ .

Знайдемо модулі цих векторів.  $\vec{AK}(2-2; 2+2; 1+3)$ .

$\vec{AK}(0; 4; 4)$ , тоді  $|\vec{AK}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ .

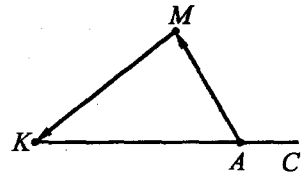
$\vec{AM}(4-2; -2+2; -1+3)$ .  $\vec{AM}(2; 0; 2)$ , тоді

$|\vec{AM}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

$\vec{AK} \cdot \vec{AM} = 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$ .

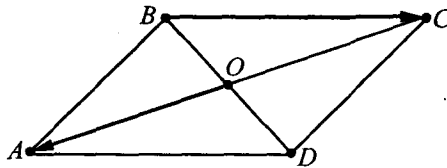
$\cos \angle KAM = \frac{\vec{AK} \cdot \vec{AM}}{|\vec{AK}| \cdot |\vec{AM}|} = \frac{8}{4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ;  $\angle KAM = 60^\circ$ . Тоді  $\angle CAM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Відповідь. 120. ■



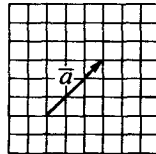
Завдання 42.1–42.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

42.1. Дано паралелограм  $ABCD$ .  $O$  — точка перетину діагоналей. Який з наведених векторів дорівнює сумі  $\overline{BC} + \overline{OA}$ ?



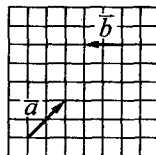
А	Б	В	Г	Д
$\overline{AB}$	$\overline{OC}$	$\overline{OB}$	$\overline{OD}$	$\overline{AD}$

42.2. Дано вектор  $\vec{a}$ . Який з наведених векторів дорівнює  $-\frac{2}{3}\vec{a}$ ?



А	Б	В	Г	Д

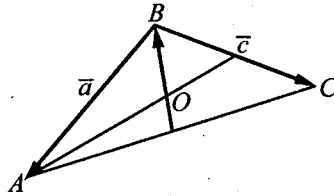
42.3. Дано вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .



Який з наведених векторів дорівнює різниці  $\vec{a} - \vec{b}$ ?

А	Б	В	Г	Д

42.4.  $O$  — точка перетину медіан трикутника  $ABC$ .  $\vec{BA} = \vec{a}$ ,  $\vec{BC} = \vec{c}$ . Виразити вектор  $\vec{OB}$  через вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{c}$ .



А	Б	В	Г	Д
$\vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$	$\vec{OB} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$	$\vec{OB} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{c}$	$\vec{OB} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}$	$\vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$

42.5. Дано точки  $A(5; -6; 7)$  і  $B(8; -2; 7)$ . Знайти абсолютну величину вектора  $\vec{AB}$ .

А	Б	В	Г	Д
5	25	$\sqrt{133}$	$9\sqrt{2}$	4

42.6. Знайти довжину вектора  $\vec{AB}$ , якщо  $A(-1; 1; -1)$ ,  $B(-1; 1; 1)$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	3	1

42.7. Серед векторів  $\vec{a}(4; 14; 2)$ ,  $\vec{b}(2; 7; -1)$ ,  $\vec{c}(0; 0; 3)$ ,  $\vec{d}(-6; -21; 3)$  знайти колінеарні.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a}$ і $\vec{c}$	$\vec{a}$ і $\vec{d}$	$\vec{b}$ і $\vec{c}$	$\vec{b}$ і $\vec{d}$

42.8. За якого значення  $n$  вектори  $\vec{a}(n+5; -8; n+1)$  і  $\vec{b}(5; 1-n; 3)$  колінеарні?

А	Б	В	Г	Д
$\pm 5$	$\pm 5; 9$	-9	5	5; 9

42.9. Дано вектори  $\vec{a}(3; -6; 2)$  і  $\vec{b}(8; 4; 5)$ . Знайти скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

А	Б	В	Г	Д
-17	0	-5760	10	-3

42.10. Обчислити квадрат довжини вектора  $\vec{a}$ , якщо відомо, що він колінеарний вектору  $\vec{c}(2; -2; 3)$  і їх скалярний добуток дорівнює 34.

А	Б	В	Г	Д
17	$\sqrt{17}$	2	4,5	68

42.11. За якого значення  $x$  вектори  $\vec{a}(3; 0; 6)$  і  $\vec{b}(-8; 7; x)$  перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
6	4	2	-4	-2

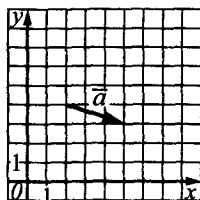
42.12. Сторона рівностороннього трикутника  $ABC$  дорівнює 4. Знайти скалярний добуток векторів  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ .

А	Б	В	Г	Д
8	-8	4	-4	2

42.13. Знайти кут між векторами  $\vec{a}(1; 0; -1)$  і  $\vec{b}(0; -1; 1)$ .

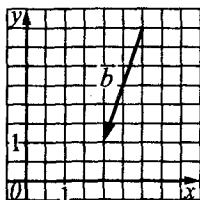
А	Б	В	Г	Д
$60^\circ$	$120^\circ$	$45^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$

42.14. Знайти координати вектора  $\vec{a}$ , зображеного на рисунку.



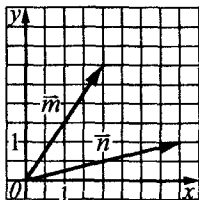
А	Б	В	Г	Д
$(-3; -1)$	$(2; 4)$	$(5; 3)$	$(3; -1)$	$(3; 1)$

42.15. Знайти абсолютну величину вектора  $\vec{b}$ , зображеного на рисунку.



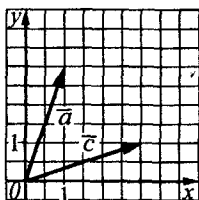
А	Б	В	Г	Д
3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{10}$	2	$\sqrt{7}$

42.16. Знайти скалярний добуток векторів  $\vec{m}$  і  $\vec{n}$ .



А	Б	В	Г	Д
9	10	11	12	14

42.17. Обчислити косинус кута між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{c}$ .



А	Б	В	Г	Д
0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

42.18. Вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  утворюють кут  $135^\circ$ ,  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ . Знайти  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	5	$4\sqrt{2}$	4

42.19. Дві сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  утворюють між собою кут  $120^\circ$ .  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 10$  Н. Знайти модуль рівнодійної цих сил.

А	Б	В	Г	Д
5 Н	10 Н	$5\sqrt{3}$ Н	20 Н	$10\sqrt{2}$ Н

42.20.  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  — ненульові вектори.  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ . Знайти кут між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

А	Б	В	Г	Д
$30^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$

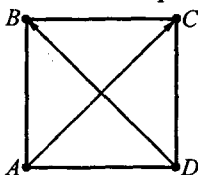
42.21. Дано вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  такі, що  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ . Знайти скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	2	4	6	8

42.22. Знайти модуль вектора  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ , якщо  $\vec{a}(1; 2)$ ,  $\vec{b}(1; 0)$ .

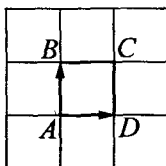
А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{41}$	3	$\sqrt{17}$	1	9

42.23. Дано квадрат  $ABCD$ . Який з наведених векторів дорівнює сумі  $\vec{AC} + \vec{DB}$ ?



А	Б	В	Г	Д
$2\vec{AB}$	$2\vec{BC}$	$\vec{0}$	$2\vec{AC}$	$2\vec{AD}$

42.24. Дано квадрат  $ABCD$  зі стороною 1. Знайти  $|\vec{3AB} - \vec{AD}|$ .



А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{3}$

Завдання 42.25–42.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

42.25. Установити відповідність між назвами формул для векторів  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$  і  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$  (1–4) та формулами (А–Д).

1 Довжина вектора  $|\vec{a}|$

2 Скалярний добуток векторів  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

3 Умова перпендикулярності векторів  $\vec{a} \perp \vec{b}$

4 Умова колінеарності векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$

А  $(a_1b_1; a_2b_2; a_3b_3)$

Б  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

В  $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3$

Г  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Д  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

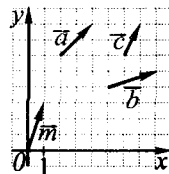
42.26. Установити відповідність між векторами (1–4) та їх скалярними добутками (А–Д).

- |   |  |      |
|---|--|------|
| 1 | $\vec{a}_1(1; 5; 14), \vec{b}_1(3; 4; -1)$ | А 7  |
| 2 | $\vec{a}_2(3; 0; -4), \vec{b}_2(5; -7; 2)$ | Б 9  |
| 3 | $\vec{a}_3(4; -2; 9), \vec{b}_3(-3; 1; 4)$ | В -6 |
| 4 | $\vec{a}_4(5; -4; -1), \vec{b}_4(3; 4; 5)$ | Г 22 |
|   |  | Д 5  |

42.27. Установити відповідність між значеннями числа  $x$  (1–4) та парами векторів (А–Д), які за цих значень взаємно перпендикулярні.

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1 | 8 | А $\vec{a}_1(2; x; -1), \vec{b}_1(-3; 2; x)$   |
| 2 | 6 | Б $\vec{a}_2(-4; 5; 2x), \vec{b}_2(6; x; -1)$  |
| 3 | 5 | В $\vec{a}_3(-x; 4; 2), \vec{b}_3(6; 3; -3x)$  |
| 4 | 1 | Г $\vec{a}_4(2; 3x; 1), \vec{b}_4(x; 1; -25)$  |
|   |   | Д $\vec{a}_5(x; -10; 1), \vec{b}_5(4; 1; -30)$ |

42.28. Установити відповідність між векторами (1–4) та їх координатами (А–Д).



- |   |           |          |
|---|-----------|----------|
| 1 | $\vec{a}$ | А (1; 2) |
| 2 | $\vec{b}$ | Б (4; 1) |
| 3 | $\vec{c}$ | В (2; 2) |
| 4 | $\vec{m}$ | Г (3; 1) |
|   |           | Д (1; 3) |

Розв'яжіть завдання 42.29–42.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

42.29. Відомо, що  $|\vec{x}| = 11, |\vec{y}| = 23$ , а  $|\vec{x} - \vec{y}| = 30$ . Знайти  $|\vec{x} + \vec{y}|$ .

42.30. Дано  $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 19, |\vec{a} + \vec{b}| = 24$ . Знайти  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

42.31. Вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  утворюють кут  $120^\circ$ .  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$ . Обчислити  $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$ .

42.32.  $\vec{a}(4; -2; -4), \vec{b}(6; -3; 2)$ . Обчислити  $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$ .

42.33. Дано  $|\vec{m}| = 2, |\vec{n}| = 3$ , а кут між векторами  $\vec{m}$  і  $\vec{n}$  дорівнює  $120^\circ$ . Обчислити косинус кута між векторами  $\vec{m}$  і  $\vec{m} + \vec{n}$  і знайти його значення з точністю до 0,01.

42.34. Знайти довжину вектора  $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ , якщо  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 4, \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ, \angle(\vec{b}; \vec{c}) = 90^\circ, \angle(\vec{a}; \vec{c}) = 120^\circ$  й обчислити його значення з точністю до 0,01.



- 42.35. Знайти косинус кута між векторами  $-5\vec{a}$  і  $\frac{1}{5}\vec{b}$  з точністю до 0,01, якщо  $\vec{a}(-1; 1; 4)$  і  $\vec{b}(1; 0; -1)$ .
- 42.36. Дано вектори  $\vec{a}(-2; 0)$ ,  $\vec{b}(1; -1)$  і  $\vec{c}(2; 3)$ . За якого значення  $k$  вектори  $2\vec{a} - k\vec{b}$  та  $\vec{c}$  будуть колінеарними?
- 42.37. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{AB}(3; 0; -4)$  і  $\vec{AD}(0; 5; 0)$ .
- 42.38. Дано трикутник  $MPK$ ,  $M(-3; -2)$ ,  $P(1; 4)$ ,  $K(2; -1)$ . Знайти у градусах величину кута  $M$ .
- 42.39. Дано вектор  $\vec{a}(2; 1; -3)$ . Знайти квадрат довжини вектора  $\vec{b}$ , якщо  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$  і вектор  $\vec{b}$  колінеарний вектору  $\vec{a}$ .
- 42.40. Дано  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$ . Знайти косинус кута між векторами  $\vec{a} + \vec{b}$  і  $\vec{a} - \vec{b}$  з точністю до 0,01.
- 42.41. Знайти косинус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}(3; 2)$  і  $\vec{b}(1; -2)$  з точністю до 0,01.
- 42.42. Знайти косинус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a} = 4\vec{m} + 2\vec{n}$  і  $\vec{b} = 4\vec{m} + \vec{n}$  з точністю до 0,01, якщо  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ ,  $\varphi = \angle(\vec{m}; \vec{n}) = 60^\circ$ .

## ВІДПОВІДІ ДО ТЕМАТИЧНИХ ЗАВДАНЬ АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

### Тема 1. Обчислення. Арифметичні задачі

1.1. Г. 1.2. Д. 1.3. Б. 1.4. Г. 1.5. В. 1.6. В. 1.7. Г. 1.8. А. 1.9. Г. 1.10. Д. 1.11. Г. 1.12. Б. 1.13. Б.  
1.14. Г. 1.15. В. 1.16. А. 1.17. Д. 1.18. В. 1.19. Г. 1.20. Г. 1.21. В. 1.22. В.

1.23	1.24	1.25	1.26	1.27
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д
1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

1.28	1.29	1.30	1.31	1.32
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д
1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	3 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
4 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	4 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

1.33	1.34	1.35	1.36	1.37
<input type="text"/> <input type="text"/> 9, 8 3	<input type="text"/> - 4 2, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 1, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 8 4, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 2 8, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
1.38	1.39	1.40	1.41	1.42
<input type="text"/> <input type="text"/> 3 2, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 2 9, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 2 5 0, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 2 8 8, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 2 2, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
1.43	1.44	1.45	1.46	1.47
<input type="text"/> <input type="text"/> 1 4, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 1 0, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 1 0, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 4 8, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 7 2, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>

### Тема 2. Вілсотки

2.1. В. 2.2. Д. 2.3. А. 2.4. Д. 2.5. Б. 2.6. В. 2.7. Б. 2.8. Г. 2.9. Д. 2.10. В. 2.11. В. 2.12. В. 2.13. Г.  
2.14. Г. 2.15. Б. 2.16. А. 2.17. Д. 2.18. А. 2.19. А. 2.20. В. 2.21. А. 2.22. Б. 2.23. А.

2.24	2.25	2.26	2.27	2.28
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д
1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>

2.29	2.30	2.31	2.32	2.33
<input type="text"/> <input type="text"/> 1, 2	<input type="text"/> <input type="text"/> 5 0, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 2, 2 5	<input type="text"/> <input type="text"/> 2, 5	<input type="text"/> <input type="text"/> 7, 2
2.34	2.35	2.36	2.37	2.38
<input type="text"/> <input type="text"/> 2 0 0, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 5 0 0, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 1, 4 4	<input type="text"/> <input type="text"/> 4, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 4, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
2.39	2.40			
<input type="text"/> <input type="text"/> 5, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 3 0, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>			

**Тема 3. Цілі вирази**

3.1. Д. 3.2. В. 3.3. А. 3.4. Д. 3.5. Г. 3.6. Г. 3.7. А. 3.8. Б. 3.9. Г. 3.10. Б. 3.11. Д. 3.12. Г. 3.13. А. 3.14. Г. 3.15. Д. 3.16. Г. 3.17. Д. 3.18. В. 3.19. Д. 3.20. В. 3.21. А. 3.22. Г. 3.23. Б.

<b>3.24</b>		<b>3.25</b>		<b>3.26</b>		<b>3.27</b>		<b>3.28</b>																					
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1				×	1		×			1	×				1			×		1			×		1			×	
2			×		2	×				2				×	2			×		2			×		2			×	
3		×			3				×	3				×	3				×	3				×	3				×
4	×				4			×		4		×			4		×			4		×			4		×		

<b>3.29</b>	<b>3.30</b>	<b>3.31</b>	<b>3.32</b>	<b>3.33</b>
<input type="text" value="2"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="15"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="9"/> , <input type="text"/>

**3.34**

,

**Тема 4. Дробово-раціональні вирази**

4.1. Г. 4.2. А. 4.3. В. 4.4. Г. 4.5. Б. 4.6. Д. 4.7. Б. 4.8. Г. 4.9. А. 4.10. Г. 4.11. Б. 4.12. Г. 4.13. Г. 4.14. В. 4.15. Д. 4.16. Б. 4.17. Б. 4.18. А. 4.19. В. 4.20. Г.

<b>4.21</b>		<b>4.22</b>		<b>4.23</b>		<b>4.24</b>		<b>4.25</b>		<b>4.26</b>																			
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1				×	1		×			1				×	1			×		1			×		1			×	
2	×				2			×		2			×		2			×		2			×		2			×	
3		×			3	×				3				×	3				×	3				×	3				×
4				×	4			×		4	×				4	×				4	×				4	×			

<b>4.27</b>	<b>4.28</b>	<b>4.29</b>	<b>4.30</b>	<b>4.31</b>
<input type="text" value="5"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="-1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="1"/> , <input type="text" value="5"/>

<b>4.32</b>	<b>4.33</b>	<b>4.34</b>	<b>4.35</b>	<b>4.36</b>
<input type="text" value="0"/> , <input type="text" value="05"/>	<input type="text" value="1"/> , <input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text" value="25"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text" value="2"/>

<b>4.37</b>	<b>4.38</b>	<b>4.39</b>	<b>4.40</b>
<input type="text" value="4"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text" value="05"/>	<input type="text" value="1"/> , <input type="text" value="11"/>	<input type="text" value="-20"/> , <input type="text"/>

**Тема 5. Ірраціональні вирази**

5.1. Г. 5.2. Д. 5.3. Б. 5.4. А. 5.5. Б. 5.6. В. 5.7. Д. 5.8. В. 5.9. А. 5.10. А. 5.11. А. 5.12. Д. 5.13. Г. 5.14. В. 5.15. В. 5.16. Б. 5.17. Д. 5.18. Г. 5.19. Г. 5.20. В. 5.21. Г. 5.22. Д. 5.23. А. 5.24. А. 5.25. Г.

<b>5.26</b>		<b>5.27</b>		<b>5.28</b>		<b>5.29</b>													
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1			×		1		×			1		×			1			×	
2	×			×	2			×		2	×			×	2	×			×
3		×			3		×			3		×			3		×		
4	×				4	×				4		×		×	4		×		×

<b>5.30</b>					<b>5.31</b>					<b>5.32</b>				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1				×	1				×	1	×			
2			×		2		×			2			×	
3	×				3			×		3				×
4		×			4	×				4	×			

<b>5.33</b>	<b>5.34</b>	<b>5.35</b>	<b>5.36</b>	<b>5.37</b>
<input type="text" value="-5"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="2"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="10"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="4"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="16"/> , <input type="text"/>
<b>5.38</b>	<b>5.39</b>	<b>5.40</b>	<b>5.41</b>	<b>5.42</b>
<input type="text" value="23"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="3"/> , <input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="-1"/> , <input type="text"/>

**Тема 6. Логарифмічні та показникові вирази**

6.1. Г. 6.2. В. 6.3. Г. 6.4. Д. 6.5. А. 6.6. А. 6.7. Д. 6.8. Б. 6.9. Г. 6.10. Д. 6.11. А. 6.12. Д. 6.13. В. 6.14. А. 6.15. Д. 6.16. Б. 6.17. Б. 6.18. Г. 6.19. В. 6.20. Б. 6.21. Г. 6.22. Б. 6.23. Б.

<b>6.24</b>					<b>6.25</b>					<b>6.26</b>					<b>6.27</b>					<b>6.28</b>					<b>6.29</b>				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1				×	1				×	1			×		1		×			1	×				1				×
2			×		2	×				2		×			2			×		2			×		2		×		
3		×			3		×			3			×		3	×				3	×				3		×		
4	×				4	×				4	×				4			×		4			×		4	×			

<b>6.30</b>					<b>6.31</b>					<b>6.32</b>					<b>6.33</b>					<b>6.34</b>				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1	×	×			1			×		1		×			1			×		1			×	
2				×	2			×		2		×			2		×			2		×		
3			×		3		×			3			×		3	×				3			×	
4	×				4		×			4	×				4	×				4	×			

<b>6.35</b>	<b>6.36</b>	<b>6.37</b>	<b>6.38</b>	<b>6.39</b>
<input type="text" value="64"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="12"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="49"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="7"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="6"/> , <input type="text"/>
<b>6.40</b>	<b>6.41</b>	<b>6.42</b>	<b>6.43</b>	<b>6.44</b>
<input type="text" value="-4"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="-2"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="7"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="2"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="-8"/> , <input type="text"/>
<b>6.45</b>	<b>6.46</b>			
<input type="text" value="1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> , <input type="text"/>			

**Тема 7. Тригонометричні вирази**

7.1. Д. 7.2. В. 7.3. Б. 7.4. А. 7.5. В. 7.6. Б. 7.7. В. 7.8. В. 7.9. Б. 7.10. А. 7.11. Д. 7.12. Б. 7.13. Д. 7.14. В. 7.15. А. 7.16. Д. 7.17. Б. 7.18. Г. 7.19. В. 7.20. Б. 7.21. Д. 7.22. А. 7.23. Г. 7.24. А. 7.25. В. 7.26. А.

<b>7.27</b>					<b>7.28</b>					<b>7.29</b>					<b>7.30</b>					<b>7.31</b>				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1	×				1		×			1		×			1		×			1			×	
2			×		2			×		2	×				2			×		2	×			
3				×	3			×		3			×		3	×				3	×			
4	×				4	×				4			×		4	×				4			×	

7.32					7.33					7.34					7.35					7.36				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1				×	1				×	1	×				1		×			1				×
2		×			2		×			2			×		2			×		2		×		
3			×		3	×				3	×				3	×				3			×	
4	×				4	×				4			×		4				×	4	×			

7.37					7.38					7.39				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1				×	1		×			1			×	
2	×				2			×		2		×		
3		×			3	×				3	×			
4			×		4		×			4		×		

7.40	7.41	7.42	7.43	7.44
<input type="text"/> - 1 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 0 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 0 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 2 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 0 , 4 <input type="text"/>
7.45	7.46	7.47	7.48	7.49
<input type="text"/> 1 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 0 , 3 7 5 <input type="text"/>	<input type="text"/> 0 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 1 6 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 4 , 5 <input type="text"/>

**Тема 8. Цілі раціональні рівняння**

8.1. Г. 8.2. Д. 8.3. В. 8.4. А. 8.5. В. 8.6. Г. 8.7. Б. 8.8. Б. 8.9. Г. 8.10. В. 8.11. Б. 8.12. Г. 8.13. А.  
8.14. А. 8.15. Д. 8.16. В. 8.17. Г. 8.18. А. 8.19. Д. 8.20. Б. 8.21. Г. 8.22. В. 8.23. Б. 8.24. Г.

8.25					8.26					8.27					8.28					8.29				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1				×	1				×	1				×	1		×			1				×
2		×			2	×				2			×		2		×			2			×	
3			×		3		×			3	×				3	×				3		×		
4			×		4		×			4	×				4			×		4			×	
8.30					8.31					8.32					8.33					8.34				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1		×			1	×				1				×	1				×	1				×
2		×			2		×			2			×		2	×				2	×			
3			×		3			×		3	×				3			×		3			×	
4	×				4	×				4			×		4		×			4	×			

8.35	8.36	8.37	8.38	8.39
<input type="text"/> 3 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 8 , 5 <input type="text"/>	<input type="text"/> 1 , <input type="text"/>	<input type="text"/> - 9 , <input type="text"/>	<input type="text"/> - 1 , <input type="text"/>
8.40	8.41	8.42	8.43	8.44
<input type="text"/> - 8 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 2 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 2 0 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 2 1 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 6 2 , <input type="text"/>
8.45	8.46	8.47	8.48	8.49
<input type="text"/> 2 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 3 , <input type="text"/>	<input type="text"/> - 2 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 6 , <input type="text"/>	<input type="text"/> 4 , <input type="text"/>

**Тема 9. Цілі раціональні нерівності**

9.1. Г. 9.2. Б. 9.3. Д. 9.4. В. 9.5. А. 9.6. Д. 9.7. Б. 9.8. Д. 9.9. Д. 9.10. В. 9.11. А. 9.12. Г. 9.13. Г.  
9.14. Д. 9.15. В. 9.16. Б. 9.17. Г. 9.18. А. 9.19. В. 9.20. Г. 9.21. А. 9.22. Б.

9.23      9.24      9.25      9.26      9.27

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2	×				
3		×			
4			×		

	А	Б	В	Г	Д
1			×		
2		×			
3				×	
4					×

	А	Б	В	Г	Д
1		×			
2				×	
3	×				
4					×

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2		×			
3			×		
4	×				

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2	×				
3		×			
4			×		

9.28      9.29      9.30      9.31      9.32

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2			×		
3				×	
4		×			

	А	Б	В	Г	Д
1				×	
2		×			
3				×	
4			×		

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2			×		
3	×				
4		×			

	А	Б	В	Г	Д
1				×	
2		×			
3				×	
4	×				

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2			×		
3				×	
4	×				

9.33      9.34      9.35      9.36      9.37

1	0	,			
---	---	---	--	--	--

-	3	,			
---	---	---	--	--	--

-	3	,			
---	---	---	--	--	--

1	,				
---	---	--	--	--	--

	2	,			
--	---	---	--	--	--

9.38      9.39      9.40      9.41      9.42

	0	,			
--	---	---	--	--	--

	8	,			
--	---	---	--	--	--

	0	,			
--	---	---	--	--	--

4	,				
---	---	--	--	--	--

	2	,	7	5	
--	---	---	---	---	--

9.43      9.44      9.45

1	2	,			
---	---	---	--	--	--

	1	,	5		
--	---	---	---	--	--

-	1	,			
---	---	---	--	--	--

**Тема 10. Дробові раціональні рівняння**

10.1. В. 10.2. Г. 10.3. Г. 10.4. Д. 10.5. А. 10.6. Д. 10.7. Г. 10.8. Г. 10.9. Г. 10.10. Д. 10.11. А. 10.12. Г. 10.13. Б. 10.14. Б. 10.15. А. 10.16. Г. 10.17. Д. 10.18. Б. 10.19. Г. 10.20. Г. 10.21. А.

10.22      10.23      10.24      10.25      10.26      10.27

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2				×	
3	×				
4		×			

	А	Б	В	Г	Д
1				×	
2			×		
3	×				
4		×			

	А	Б	В	Г	Д
1			×		
2				×	
3					×
4	×				

	А	Б	В	Г	Д
1		×			
2			×		
3				×	
4	×				

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2			×		
3	×				
4		×			

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2			×		
3				×	
4	×				

10.28      10.29      10.30      10.31      10.32

	1	,			
--	---	---	--	--	--

-	0	,	5		
---	---	---	---	--	--

	9	,			
--	---	---	--	--	--

-	3	,	5		
---	---	---	---	--	--

-	2	5	,		
---	---	---	---	--	--

10.33      10.34      10.35      10.36      10.37

-	4	,			
---	---	---	--	--	--

	0	,	8		
--	---	---	---	--	--

4	0	,			
---	---	---	--	--	--

1	6	,			
---	---	---	--	--	--

1	0	,			
---	---	---	--	--	--

10.38      10.39      10.40      10.41      10.42

	3	,	5		
--	---	---	---	--	--

-	7	,			
---	---	---	--	--	--

	2	,			
--	---	---	--	--	--

-	0	,	5		
---	---	---	---	--	--

	1	,			
--	---	---	--	--	--

**Тема 11. Дробові раціональні нерівності**

11.1. В. 11.2. Д. 11.3. В. 11.4. А. 11.5. Г. 11.6. Б. 11.7. Б. 11.8. В. 11.9. В. 11.10. Г. 11.11. А. 11.12. В. 11.13. Г. 11.14. Б. 11.15. В. 11.16. Б. 11.17. В. 11.18. Д. 11.19. А. 11.20. В. 11.21. Г. 11.22. Б.

11.23      11.24      11.25      11.26

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2			×		
3	×				
4				×	

	А	Б	В	Г	Д
1	×				
2					×
3		×			
4				×	

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2				×	
3	×				
4			×		

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2			×		
3	×				
4		×			

<b>11.27</b>					<b>11.28</b>					<b>11.29</b>							
	А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

<b>11.30</b>	<b>11.31</b>	<b>11.32</b>	<b>11.33</b>	<b>11.34</b>
<input type="text" value="-4"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="-2"/> <input type="text" value="4"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="-1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="2"/> , <input type="text"/>
<b>11.35</b>	<b>11.36</b>	<b>11.37</b>	<b>11.38</b>	<b>11.39</b>
<input type="text" value="-1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="-2"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="2"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="2"/> , <input type="text"/>
<b>11.40</b>	<b>11.41</b>	<b>11.42</b>	<b>11.43</b>	
<input type="text" value="-2"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="9"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="-8"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="-8"/> , <input type="text"/>	

### Тема 12. Ірраціональні рівняння

12.1. Д. 12.2. Г. 12.3. Д. 12.4. Г. 12.5. А. 12.6. Б. 12.7. Г. 12.8. Д. 12.9. В. 12.10. А. 12.11. Д. 12.12. А.  
12.13. Б. 12.14. В. 12.15. А. 12.16. В. 12.17. В. 12.18. Д. 12.19. В. 12.20. Г. 12.21. Д. 12.22. Г. 12.23. А.

<b>12.24</b>					<b>12.25</b>					<b>12.26</b>					<b>12.27</b>								
	А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

<b>12.28</b>					<b>12.29</b>					<b>12.30</b>							
	А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
2	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	

<b>12.31</b>	<b>12.32</b>	<b>12.33</b>	<b>12.34</b>	<b>12.35</b>
<input type="text" value="5"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="3"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="3"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="4"/> , <input type="text"/>
<b>12.36</b>	<b>12.37</b>	<b>12.38</b>	<b>12.39</b>	<b>12.40</b>
<input type="text" value="1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="5"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="3"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="8"/> , <input type="text"/>
<b>12.41</b>	<b>12.42</b>	<b>12.43</b>	<b>12.44</b>	<b>12.45</b>
<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="8"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="-5"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="0"/> , <input type="text"/>
<b>12.46</b>	<b>12.47</b>			
<input type="text" value="2"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> , <input type="text"/>			

### Тема 13. Ірраціональні нерівності

13.1. Г. 13.2. В. 13.3. Д. 13.4. Б. 13.5. Г. 13.6. А. 13.7. В. 13.8. Д. 13.9. Г. 13.10. Б. 13.11. Б.  
13.12. Д. 13.13. Г. 13.14. В. 13.15. Д. 13.16. В. 13.17. Б. 13.18. Г. 13.19. Д. 13.20. Б.

13.21					13.22					13.23					13.24				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1	×				1				×	1		×			1		×		
2				×	2	×				2	×				2				×
3			×		3				×	3				×	3				×
4				×	4		×			4			×		4	×			

13.25					13.26					13.27				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1		×			1				×	1		×		
2				×	2				×	2				×
3	×				3			×		3	×			
4			×		4	×				4				×

13.28	13.29	13.30	13.31	13.32
<input type="text"/> <input type="text"/> 9, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> 2 4, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 6, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> 2 0, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> 1 4, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
13.33	13.34	13.35	13.36	13.37
<input type="text"/> - 2, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 6, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 1, 5 <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> - 1, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 9, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
13.38	13.39	13.40		
<input type="text"/> 2 4, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> 1 2 0, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> 4 8 0, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>		

### Тема 14. Показникові рівняння

14.1. В. 14.2. Д. 14.3. В. 14.4. Б. 14.5. Д. 14.6. Д. 14.7. Г. 14.8. Б. 14.9. А. 14.10. Г. 14.11. А. 14.12. Д. 14.13. В. 14.14. Б. 14.15. Д. 14.16. Г. 14.17. В. 14.18. А. 14.19. В. 14.20. Г. 14.21. Д. 14.22. Г. 14.23. Г.

14.24					14.25					14.26					14.27					14.28				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1				×	1				×	1				×	1			×		1			×	
2			×		2	×				2		×			2				×	2				×
3				×	3		×			3	×				3	×				3	×			
4		×			4			×		4			×		4		×			4			×	

14.29	14.30	14.31	14.32	14.33
<input type="text"/> <input type="text"/> 4, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 0, 4 <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 7, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 9, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 0, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
14.34	14.35	14.36	14.37	14.38
<input type="text"/> - 6, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> - 3, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 0, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 1, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 1, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
14.39	14.40	14.41	14.42	14.43
<input type="text"/> - 0, 2 <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 1, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> 1 3, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 4, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 1, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>

### Тема 15. Показникові нерівності

15.1. Г. 15.2. Д. 15.3. Г. 15.4. А. 15.5. В. 15.6. Г. 15.7. Д. 15.8. Г. 15.9. Г. 15.10. А. 15.11. Д. 15.12. Д. 15.13. В. 15.14. В. 15.15. А. 15.16. Б. 15.17. Г. 15.18. Б. 15.19. Д. 15.20. А. 15.21. Д.

15.22					15.23					15.24					15.25				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1		×			1		×			1	×				1			×	
2				×	2				×	2				×	2			×	
3				×	3		×			3		×			3				×
4		×			4	×				4	×				4	×			



15.26 [ 4   5   ,       ]	15.27 [ -   5   ,       ]	15.28 [ 1   6   ,       ]	15.29 [   0   ,   5     ]	15.30 [   0   ,   5     ]
15.31 [   3   ,       ]	15.32 [   0   ,   5     ]	15.33 [ -   0   ,   5     ]	15.34 [   4   ,       ]	15.35 [   3   ,       ]
15.36 [   0   ,       ]	15.37 [ -   1   ,       ]	15.38 [   9   ,       ]	15.39 [ -   4   ,       ]	15.40 [   0   ,       ]
15.41 [   0   ,       ]				

**Тема 16. Логарифмічні рівняння**

16.1. Г. 16.2. Д. 16.3. В. 16.4. Д. 16.5. Б. 16.6. Б. 16.7. В. 16.8. Б. 16.9. Д. 16.10. В. 16.11. Г. 16.12. Д. 16.13. Г. 16.14. А. 16.15. А. 16.16. А. 16.17. Д. 16.18. Д. 16.19. Б. 16.20. Д.

16.21 А Б В Г Д 1 [         ] 2 [         ] 3 [         ] 4 [         ]	16.22 А Б В Г Д 1 [         ] 2 [         ] 3 [         ] 4 [         ]	16.23 А Б В Г Д 1 [         ] 2 [         ] 3 [         ] 4 [         ]	16.24 А Б В Г Д 1 [         ] 2 [         ] 3 [         ] 4 [         ]	16.25 А Б В Г Д 1 [         ] 2 [         ] 3 [         ] 4 [         ]	16.26 А Б В Г Д 1 [         ] 2 [         ] 3 [         ] 4 [         ]
16.27 [   9   ,       ]	16.28 [   6   ,       ]	16.29 [ -   1   0   ,       ]	16.30 [ -   1   0   ,       ]	16.31 [ 9   0   0   ,       ]	
16.32 [   1   0   ,       ]	16.33 [   1   2   5   ,       ]	16.34 [   6   4   ,       ]	16.35 [   0   ,   1     ]	16.36 [   1   ,       ]	
16.37 [   1   ,       ]	16.38 [   0   ,   6   2   5   ]	16.39 [   2   5   ,       ]			

**Тема 17. Логарифмічні нерівності**

17.1. Г. 17.2. Д. 17.3. А. 17.4. Г. 17.5. Б. 17.6. В. 17.7. Б. 17.8. Д. 17.9. Г. 17.10. Г. 17.11. В. 17.12. В. 17.13. Д. 17.14. Б. 17.15. А. 17.16. Б. 17.17. Б. 17.18. Д. 17.19. В. 17.20. В. 17.21. А. 17.22. Г.

17.23 А Б В Г Д 1 [         ] 2 [         ] 3 [         ] 4 [         ]	17.24 А Б В Г Д 1 [         ] 2 [         ] 3 [         ] 4 [         ]	17.25 А Б В Г Д 1 [         ] 2 [         ] 3 [         ] 4 [         ]	17.26 А Б В Г Д 1 [         ] 2 [         ] 3 [         ] 4 [         ]	17.27 А Б В Г Д 1 [         ] 2 [         ] 3 [         ] 4 [         ]	17.28 А Б В Г Д 1 [         ] 2 [         ] 3 [         ] 4 [         ]
17.29 [   1   ,       ]	17.30 [   2   6   ,       ]	17.31 [ 9   0   1   ,       ]	17.32 [   9   ,       ]	17.33 [ 1   0   0   ,       ]	
17.34 [   2   ,       ]	17.35 [   9   ,       ]	17.36 [   1   ,       ]	17.37 [   1   ,       ]	17.38 [   2   4   ,       ]	
17.39 [ -   1   ,       ]	17.40 [   1   ,       ]	17.41 [   2   ,       ]			

**Тема 18. Тригонометричні рівняння**

18.1. Д. 18.2. Д. 18.3. Б. 18.4. А. 18.5. В. 18.6. Д. 18.7. В. 18.8. Д. 18.9. Б. 18.10. Г. 18.11. Б. 18.12. А.  
18.13. Д. 18.14. В. 18.15. Д. 18.16. В. 18.17. А. 18.18. Б. 18.19. Г. 18.20. Д. 18.21. В. 18.22. Г.

<b>18.23</b>	<b>18.24</b>	<b>18.25</b>	<b>18.26</b>	<b>18.27</b>	<b>18.28</b>																																																																																																																																																																																				
<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1		×				2	×					3					×	4				×		<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1	×					2					×	3		×				4			×			<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1		×				2					×	3					×	4				×		<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1					×	2					×	3	×					4		×				<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>4</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1		×				2					×	3					×	4	×					<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1					×	2					×	3	×					4			×		
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																																																																																				
1		×																																																																																																																																																																																							
2	×																																																																																																																																																																																								
3					×																																																																																																																																																																																				
4				×																																																																																																																																																																																					
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																																																																																				
1	×																																																																																																																																																																																								
2					×																																																																																																																																																																																				
3		×																																																																																																																																																																																							
4			×																																																																																																																																																																																						
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																																																																																				
1		×																																																																																																																																																																																							
2					×																																																																																																																																																																																				
3					×																																																																																																																																																																																				
4				×																																																																																																																																																																																					
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																																																																																				
1					×																																																																																																																																																																																				
2					×																																																																																																																																																																																				
3	×																																																																																																																																																																																								
4		×																																																																																																																																																																																							
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																																																																																				
1		×																																																																																																																																																																																							
2					×																																																																																																																																																																																				
3					×																																																																																																																																																																																				
4	×																																																																																																																																																																																								
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																																																																																				
1					×																																																																																																																																																																																				
2					×																																																																																																																																																																																				
3	×																																																																																																																																																																																								
4			×																																																																																																																																																																																						

<b>18.29</b>	<b>18.30</b>	<b>18.31</b>	<b>18.32</b>	<b>18.33</b>	<b>18.34</b>																																																																																																																																																																																				
<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1			×			2					×	3					×	4		×				<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1					×	2					×	3	×					4			×			<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>2</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1					×	2	×					3					×	4				×		<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1					×	2					×	3					×	4		×				<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1		×				2					×	3	×					4		×				<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>4</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1					×	2					×	3					×	4	×				
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																																																																																				
1			×																																																																																																																																																																																						
2					×																																																																																																																																																																																				
3					×																																																																																																																																																																																				
4		×																																																																																																																																																																																							
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																																																																																				
1					×																																																																																																																																																																																				
2					×																																																																																																																																																																																				
3	×																																																																																																																																																																																								
4			×																																																																																																																																																																																						
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																																																																																				
1					×																																																																																																																																																																																				
2	×																																																																																																																																																																																								
3					×																																																																																																																																																																																				
4				×																																																																																																																																																																																					
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																																																																																				
1					×																																																																																																																																																																																				
2					×																																																																																																																																																																																				
3					×																																																																																																																																																																																				
4		×																																																																																																																																																																																							
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																																																																																				
1		×																																																																																																																																																																																							
2					×																																																																																																																																																																																				
3	×																																																																																																																																																																																								
4		×																																																																																																																																																																																							
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																																																																																				
1					×																																																																																																																																																																																				
2					×																																																																																																																																																																																				
3					×																																																																																																																																																																																				
4	×																																																																																																																																																																																								

<b>18.35</b>	<b>18.36</b>	<b>18.37</b>	<b>18.38</b>	<b>18.39</b>																														
<table border="1"><tr><td></td><td>0</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		0	,				<table border="1"><tr><td></td><td>1</td><td>,</td><td>0</td><td></td><td></td></tr></table>		1	,	0			<table border="1"><tr><td></td><td>2</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		2	,				<table border="1"><tr><td></td><td>0</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		0	,				<table border="1"><tr><td></td><td>2</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		2	,			
	0	,																																
	1	,	0																															
	2	,																																
	0	,																																
	2	,																																

<b>18.40</b>	<b>18.41</b>	<b>18.42</b>	<b>18.43</b>	<b>18.44</b>																														
<table border="1"><tr><td></td><td>0</td><td>,</td><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>		0	,	5			<table border="1"><tr><td></td><td>3</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		3	,				<table border="1"><tr><td></td><td>0</td><td>,</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>		0	,	1	2	5	<table border="1"><tr><td></td><td>5</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		5	,				<table border="1"><tr><td></td><td>8</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		8	,			
	0	,	5																															
	3	,																																
	0	,	1	2	5																													
	5	,																																
	8	,																																

<b>18.45</b>	<b>18.46</b>	<b>18.47</b>	<b>18.48</b>	<b>18.49</b>																														
<table border="1"><tr><td></td><td>1</td><td>4</td><td>,</td><td></td><td></td></tr></table>		1	4	,			<table border="1"><tr><td></td><td>3</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		3	,				<table border="1"><tr><td></td><td>1</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		1	,				<table border="1"><tr><td></td><td>1</td><td>,</td><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>		1	,	5			<table border="1"><tr><td></td><td>0</td><td>,</td><td>2</td><td>5</td><td></td></tr></table>		0	,	2	5	
	1	4	,																															
	3	,																																
	1	,																																
	1	,	5																															
	0	,	2	5																														

<b>18.50</b>	<b>18.51</b>	<b>18.52</b>																		
<table border="1"><tr><td></td><td>8</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		8	,				<table border="1"><tr><td></td><td>3</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		3	,				<table border="1"><tr><td></td><td>1</td><td>,</td><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>		1	,	5		
	8	,																		
	3	,																		
	1	,	5																	

**Тема 19. Тригонометричні нерівності**

19.1. Д. 19.2. В. 3. Д. 19.4. А. 19.5. Д. 19.6. В. 19.7. Г. 19.8. Г. 19.9. Д. 19.10. Б. 19.11. В.  
19.12. В. 19.13. А. 19.14. Д. 19.15. В. 19.16. Д. 19.17. А. 19.18. Г. 19.19. Г. 19.20. В.

<b>19.21</b>	<b>19.22</b>	<b>19.23</b>	<b>19.24</b>																																																																																																																								
<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>2</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1					×	2	×					3					×	4				×		<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1					×	2					×	3	×					4		×				<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1		×				2					×	3	×					4					×	<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1					×	2					×	3					×	4		×			
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																						
1					×																																																																																																																						
2	×																																																																																																																										
3					×																																																																																																																						
4				×																																																																																																																							
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																						
1					×																																																																																																																						
2					×																																																																																																																						
3	×																																																																																																																										
4		×																																																																																																																									
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																						
1		×																																																																																																																									
2					×																																																																																																																						
3	×																																																																																																																										
4					×																																																																																																																						
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																																						
1					×																																																																																																																						
2					×																																																																																																																						
3					×																																																																																																																						
4		×																																																																																																																									

<b>19.25</b>	<b>19.26</b>	<b>19.27</b>																																																																																										
<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1					×	2					×	3					×	4		×				<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1					×	2					×	3					×	4		×				<table border="1"><tr><td></td><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr></table>		А	Б	В	Г	Д	1		×				2					×	3					×	4					×
	А	Б	В	Г	Д																																																																																							
1					×																																																																																							
2					×																																																																																							
3					×																																																																																							
4		×																																																																																										
	А	Б	В	Г	Д																																																																																							
1					×																																																																																							
2					×																																																																																							
3					×																																																																																							
4		×																																																																																										
	А	Б	В	Г	Д																																																																																							
1		×																																																																																										
2					×																																																																																							
3					×																																																																																							
4					×																																																																																							

<b>19.28</b>	<b>19.29</b>	<b>19.30</b>	<b>19.31</b>	<b>19.32</b>																														
<table border="1"><tr><td></td><td>1</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		1	,				<table border="1"><tr><td></td><td>2</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		2	,				<table border="1"><tr><td></td><td>6</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		6	,				<table border="1"><tr><td></td><td>5</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		5	,				<table border="1"><tr><td></td><td>3</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		3	,			
	1	,																																
	2	,																																
	6	,																																
	5	,																																
	3	,																																

<b>19.33</b>						
<table border="1"><tr><td></td><td>1</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		1	,			
	1	,				

**Тема 20. Системи рівнянь**

20.1. В. 20.2. Д. 20.3. А. 20.4. Б. 20.5. Б. 20.6. Б. 20.7. Г. 20.8. А. 20.9. Д. 20.10. В. 20.11. Д. 20.12. Б.  
20.13. Г. 20.14. Б. 20.15. А. 20.16. Г. 20.17. Б. 20.18. Б. 20.19. В. 20.20. В. 20.21. Б. 20.22. В. 20.23. Д.

<b>20.24</b>	<b>20.25</b>	<b>20.26</b>	<b>20.27</b>	<b>20.28</b>
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д
1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
3 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

<b>20.29</b>	<b>20.30</b>	<b>20.31</b>	<b>20.32</b>	<b>20.33</b>
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 3, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 6, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 7, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 3, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 1, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>20.34</b>	<b>20.35</b>	<b>20.36</b>	<b>20.37</b>	<b>20.38</b>
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 2, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> -4, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> 1 2, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 3, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 4, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>20.39</b>	<b>20.40</b>	<b>20.41</b>	<b>20.42</b>	<b>20.43</b>
<input type="checkbox"/> 6 8, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 6, 5 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 6; <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 3, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> 1 2, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>20.44</b>				
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 2, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>				

**Тема 21. Арифметична та геометрична прогресії**

21.1. Г. 21.2. Д. 21.3. В. 21.4. Г. 21.5. Б. 21.6. В. 21.7. В. 21.8. Г. 21.9. Д. 21.10. В. 21.11. А. 21.12. Б.  
21.13. Д. 21.14. Г. 21.15. Б. 21.16. А. 21.17. В. 21.18. В. 21.19. Г. 21.20. Д. 21.21. А. 21.22. Б.

<b>21.23</b>	<b>21.24</b>	<b>21.25</b>	<b>21.26</b>	<b>21.27</b>	<b>21.28</b>
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д
1 <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	3 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

<b>21.29</b>	<b>21.30</b>	<b>21.31</b>	<b>21.32</b>	<b>21.33</b>
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д
1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>21.34</b>	<b>21.35</b>	<b>21.36</b>	<b>21.37</b>	<b>21.38</b>
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> -4, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> 1 1 7, 8 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> 1 0, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> 7 0 3, 3 6 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 4, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>21.39</b>	<b>21.40</b>	<b>21.41</b>	<b>21.42</b>	<b>21.43</b>
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 2, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> -0, 0 0 5 <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> 6 4 0, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 3, 3 7 5 <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> 5 9 0, 4 9 <input type="checkbox"/>
<b>21.44</b>	<b>21.45</b>	<b>21.46</b>		
<input type="checkbox"/> 8 2, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> 4 3 7, 2 5 <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> -2, <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		

**Тема 22. Елементарні функції та їхні властивості**

22.1. В. 22.2. В. 22.3. Д. 22.4. Д. 22.5. В. 22.6. Б. 22.7. Б. 22.8. Г. 22.9. Б. 22.10. А. 22.11. В.  
 22.12. В. 22.13. Д. 22.14. А. 22.15. Г. 22.16. Б. 22.17. А. 22.18. Б. 22.19. Б. 22.20. Д. 22.21. В.  
 22.22. А. 22.23. Д. 22.24. А. 22.25. Д. 22.26. Г. 22.27. В. 22.28. В. 22.29. Г.

<b>22.30</b>	<b>22.31</b>	<b>22.32</b>	<b>22.33</b>	<b>22.34</b>	<b>22.35</b>																																																																																																																								
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д																																																																																																																								
1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr></table>			×						×		×							×			1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>				×		×							×						×		1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>				×						×			×						×		1 <table border="1"><tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>	×								×		×				×				×		1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr></table>				×				×							×			×			1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr></table>				×						×	×							×		
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										
×																																																																																																																													
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										
×																																																																																																																													
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										
			×																																																																																																																										
				×																																																																																																																									
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										
×																																																																																																																													
			×																																																																																																																										
×				×																																																																																																																									
			×																																																																																																																										
			×																																																																																																																										
		×																																																																																																																											
				×																																																																																																																									
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										
				×																																																																																																																									
×																																																																																																																													
		×																																																																																																																											

<b>22.36</b>	<b>22.37</b>	<b>22.38</b>	<b>22.39</b>	<b>22.40</b>																																																																																																				
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д																																																																																																				
1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>				×		×							×				×				1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>			×						×				×						×		1 <table border="1"><tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>	×								×		×				×				×		1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr></table>				×				×							×			×			1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>				×						×			×						×	
			×																																																																																																					
×																																																																																																								
		×																																																																																																						
	×																																																																																																							
		×																																																																																																						
			×																																																																																																					
		×																																																																																																						
			×																																																																																																					
×																																																																																																								
			×																																																																																																					
×				×																																																																																																				
			×																																																																																																					
			×																																																																																																					
		×																																																																																																						
				×																																																																																																				
		×																																																																																																						
			×																																																																																																					
				×																																																																																																				
		×																																																																																																						
			×																																																																																																					

<b>22.41</b>	<b>22.42</b>	<b>22.43</b>	<b>22.44</b>	<b>22.45</b>																														
<table border="1"><tr><td></td><td>7</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		7	,				<table border="1"><tr><td></td><td>2</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		2	,				<table border="1"><tr><td></td><td>3</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		3	,				<table border="1"><tr><td></td><td>7</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		7	,				<table border="1"><tr><td></td><td>10</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		10	,			
	7	,																																
	2	,																																
	3	,																																
	7	,																																
	10	,																																
<b>22.46</b>	<b>22.47</b>	<b>22.48</b>	<b>22.49</b>	<b>22.50</b>																														
<table border="1"><tr><td></td><td>2</td><td>;</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		2	;				<table border="1"><tr><td></td><td>2</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		2	,				<table border="1"><tr><td></td><td>5</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		5	,				<table border="1"><tr><td></td><td>30</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		30	,				<table border="1"><tr><td></td><td>-2</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		-2	,			
	2	;																																
	2	,																																
	5	,																																
	30	,																																
	-2	,																																
<b>22.51</b>	<b>22.52</b>	<b>22.53</b>																																
<table border="1"><tr><td></td><td>1</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		1	,				<table border="1"><tr><td></td><td>1</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		1	,				<table border="1"><tr><td></td><td>0</td><td>,</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		0	,																	
	1	,																																
	1	,																																
	0	,																																

**Тема 23. Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень**

23.1. Г. 23.2. Д. 23.3. Б. 23.4. В. 23.5. Г. 23.6. А. 23.7. Д. 23.8. В. 23.9. Б. 23.10. В. 23.11. Д.  
 23.12. В. 23.13. Б. 23.14. Г. 23.15. В. 23.16. Д. 23.17. Б. 23.18. Г. 23.19. А. 23.20. В.

<b>23.21</b>	<b>23.22</b>	<b>23.23</b>	<b>23.24</b>	<b>23.25</b>	<b>23.26</b>																																																																																																																								
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д																																																																																																																								
1 <table border="1"><tr><td>×</td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr></table>	×	×				×								×						×	1 <table border="1"><tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	×								×				×				×				1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>				×						×			×						×		1 <table border="1"><tr><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr></table>		×				×								×						×	1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr></table>				×				×							×			×			1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td>×</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr></table>				×						×	×							×		
×	×																																																																																																																												
×																																																																																																																													
			×																																																																																																																										
				×																																																																																																																									
×																																																																																																																													
			×																																																																																																																										
		×																																																																																																																											
	×																																																																																																																												
			×																																																																																																																										
				×																																																																																																																									
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										
	×																																																																																																																												
×																																																																																																																													
			×																																																																																																																										
				×																																																																																																																									
			×																																																																																																																										
		×																																																																																																																											
				×																																																																																																																									
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										
				×																																																																																																																									
×																																																																																																																													
		×																																																																																																																											
<b>23.27</b>	<b>23.28</b>	<b>23.29</b>	<b>23.30</b>	<b>23.31</b>	<b>23.32</b>																																																																																																																								
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д																																																																																																																								
1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>			×						×			×							×		1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>				×						×			×						×		1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>				×						×			×						×		1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>				×						×			×						×		1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td>×</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>			×						×			×							×		1 <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>×</td></tr><tr><td></td><td></td><td>×</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table>				×						×			×						×	
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										
	×																																																																																																																												
			×																																																																																																																										
			×																																																																																																																										
				×																																																																																																																									
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										
			×																																																																																																																										
				×																																																																																																																									
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										
			×																																																																																																																										
				×																																																																																																																									
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										
	×																																																																																																																												
			×																																																																																																																										
			×																																																																																																																										
				×																																																																																																																									
		×																																																																																																																											
			×																																																																																																																										

**Тема 24. Похідна функції, її геометричний та механічний зміст**

24.1. В. 24.2. Б. 24.3. Д. 24.4. В. 24.5. Г. 24.6. Г. 24.7. А. 24.8. Г. 24.9. Б. 24.10. Г. 24.11. Б.  
 24.12. Д. 24.13. А. 24.14. А. 24.15. Б. 24.16. Г. 24.17. Г. 24.18. А. 24.19. Г. 24.20. А. 24.21. В.  
 24.22. Д. 24.23. В. 24.24. Д. 24.25. Б. 24.26. Г. 24.27. Б.

<b>24.28</b>					<b>24.29</b>					<b>24.30</b>					<b>24.31</b>					<b>24.32</b>					<b>24.33</b>									
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1				×	1		×			1				×	1				×	1		×			1				×	1				×
2	×				2				×	2				×	2				×	2				×	2				×	2				×
3		×			3		×			3				×	3				×	3				×	3				×	3				×
4				×	4	×				4	×				4	×				4	×				4	×				4	×			

<b>24.34</b>					<b>24.35</b>					<b>24.36</b>					<b>24.37</b>					<b>24.38</b>				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1				×	1				×	1				×	1	×				1		×		
2				×	2	×				2	×				2				×	2				×
3				×	3		×			3				×	3				×	3				×
4	×				4				×	4				×	4	×				4				×

<b>24.39</b>					<b>24.40</b>					<b>24.41</b>					<b>24.42</b>					<b>24.43</b>						
	6	,				0	,				0	,				0	,	8	7	5		0	,	1		
<b>24.44</b>					<b>24.45</b>					<b>24.46</b>					<b>24.47</b>					<b>24.48</b>						
	-	0	,	2		-	1	0	,			0	,	5			6	,				1	6	,	6	7
<b>24.49</b>					<b>24.50</b>					<b>24.51</b>																
	-	1	,				1	,				0	,	5												

**Тема 25. Застосування похідної для дослідження функцій**

25.1. Б. 25.2. Г. 25.3. Д. 25.4. Б. 25.5. А. 25.6. Г. 25.7. А. 25.8. В. 25.9. Д. 25.10. В. 25.11. Б.  
 25.12. Б. 25.13. В. 25.14. А. 25.15. В. 25.16. Г. 25.17. Д. 25.18. Г. 25.19. Б. 25.20. Б. 25.21. Г.  
 25.22. В. 25.23. Д. 25.24. Д.

<b>25.25</b>					<b>25.26</b>					<b>25.27</b>					<b>25.28</b>					<b>25.29</b>					<b>25.30</b>				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1		×			1				×	1				×	1				×	1				×	1	×			
2				×	2				×	2				×	2				×	2				×	2				×
3	×				3				×	3	×				3	×				3				×	3				×
4				×	4	×				4				×	4				×	4	×				4	×			

<b>25.31</b>					<b>25.32</b>					<b>25.33</b>					<b>25.34</b>					<b>25.35</b>				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1				×	1				×	1				×	1	×				1		×		
2	×				2	×				2	×				2				×	2				×
3				×	3				×	3				×	3	×				3				×
4				×	4				×	4				×	4				×	4				×

<b>25.36</b>					<b>25.37</b>					<b>25.38</b>					<b>25.39</b>					<b>25.40</b>							
	0	,	5			2	,				1	7	,				1	2	8	,		8	0	,			
<b>25.41</b>					<b>25.42</b>					<b>25.43</b>					<b>25.44</b>					<b>25.45</b>							
	2	,				4	,				-	1	,				-	4	,				-	0	,	5	

**Тема 26. Первісна. Інтеграл**

26.1. Б. 26.2. А. 26.3. Б. 26.4. Г. 26.5. Д. 26.6. Г. 26.7. Б. 26.8. Г. 26.9. Д. 26.10. В. 26.11. Д.  
 26.12. В. 26.13. Д. 26.14. Б. 26.15. Г. 26.16. В. 26.17. А. 26.18. Б. 26.19. Д. 26.20. В. 26.21. Г.  
 26.22. Д. 26.23. Г.

26.24					26.25					26.26					26.27					26.28									
1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д
2	×					2				×		2				×		2				×		2				×	
3		×				3	×				×	3	×				×	3	×				×	3	×				×
4				×		4		×				4		×				4		×				4		×			

26.29					26.30					26.31					26.32								
1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д
2			×			2			×			2			×			2	×				×
3					×	3				×		3				×		3				×	
4	×					4	×					4	×					4	×				

26.33					26.34					26.35					26.36					26.37									
1	1	2				3	1	3					2					1	2	5				4	5				
26.38					26.39					26.40					26.41					26.42									
		0	0	8				4	5					0	5					-2						1	8		

**Тема 27. Елементи комбінаторики**

27.1. Г. 27.2. В. 27.3. Д. 27.4. Д. 27.5. В. 27.6. А. 27.7. А. 27.8. Д. 27.9. А. 27.10. Д. 27.11. Г.  
 27.12. Д. 27.13. В. 27.14. А. 27.15. Г. 27.16. В. 27.17. Б. 27.18. Д. 27.19. Г. 27.20. В. 27.21. А.  
 27.22. В. 27.23. Д. 27.24. Б.

27.25					27.26					27.27					27.28					27.29									
1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д
2	×					2				×		2	×				×	2				×		2	×				×
3		×				3				×		3				×		3				×		3				×	
4				×		4	×					4		×				4		×				4		×			

27.30					27.31					27.32					27.33								
1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д	1	А	Б	В	Г	Д
2		×				2				×		2				×		2				×	
3	×					3				×		3				×		3	×				×
4				×		4	×					4		×				4		×			

27.34					27.35					27.36					27.37					27.38									
		1					1	0					-2	0					1	2	6				6	0			
27.39					27.40					27.41					27.42					27.43									
		7	2				1	1	4				2	4	0				7	0	0				4	9	5		
27.44					27.45					27.46																			
		5	6	0			5	0	4				9	1															

**Тема 28. Початки теорії ймовірностей та елементи статистики**

28.1. Д. 28.2. Г. 28.3. Д. 28.4. Д. 28.5. В. 28.6. А. 28.7. В. 28.8. Д. 28.9. Г. 28.10. А. 28.11. Г.  
 28.12. В. 28.13. Д. 28.14. А. 28.15. Д. 28.16. Г. 28.17. Б. 28.18. Б. 28.19. Д. 28.20. В. 28.21. В.  
 28.22. В. 28.23. Б. 28.24. Д.

28.25					28.26					28.27					28.28					28.29					28.30				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1				×	1			×		1				×	1				×	1			×		1				×
2			×		2	×				2	×				2				×	2			×		2				×
3	×				3			×		3				×	3	×				3				×	3		×		
4		×			4		×			4			×		4		×			4		×			4	×			

28.31					28.32					28.33					28.34					28.35				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1		×			1			×		1			×		1		×			1			×	
2				×	2				×	2		×			2				×	2	×			
3				×	3	×				3	×				3				×	3		×		
4	×				4		×			4			×		4	×				4			×	

28.36					28.37					28.38					28.39					28.40				
		0	,	5			0	,	8 7 5			0	,	0 6			0	,	4 2			0	,	0 8 8
28.41					28.42					28.43					28.44					28.45				
		0	,	1			0	,	4 9			0	,	8 6			6	,				0	,	8
28.46					28.47					28.48					28.49					28.50				
		0	,	9 4			0	,	3 4			0	,	6 7			1 0	,				0	,	6

## ВІДПОВІДІ ДО ТЕМАТИЧНИХ ЗАВДАНЬ ГЕОМЕТРІЯ

### Тема 29. Трикутник

29.1. Г. 29.2. В. 29.3. А. 29.4. Д. 29.5. Д. 29.6. В. 29.7. Д. 29.8. Г. 29.9. А. 29.10. Г. 29.11. Д.  
29.12. Г. 29.13. Б. 29.14. В. 29.15. Г. 29.16. Г. 29.17. Д. 29.18. Б. 29.19. Г. 29.20. Б. 29.21. А.

29.22					29.23					29.24					29.25				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

29.26	29.27	29.28	29.29	29.30
<input type="text" value="6"/> <input type="text" value="5"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="1"/> <input type="text" value=","/> <input type="text" value="5"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="5"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="6"/> <input type="text" value=","/> <input type="text" value="5"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="7"/> <input type="text" value=","/> <input type="text" value="5"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
29.31	29.32	29.33	29.34	29.35
<input type="text" value="5"/> <input type="text" value="0"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="0"/> <input type="text" value=","/> <input type="text" value="7"/> <input type="text" value="3"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text" value="3"/> <input type="text" value="3"/> <input type="text" value="6"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="5"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text" value="6"/> <input type="text" value="0"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
29.36	29.37	29.38	29.39	
<input type="text"/> <input type="text" value="4"/> <input type="text" value=","/> <input type="text" value="4"/> <input type="text" value="4"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="7"/> <input type="text" value="2"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="2"/> <input type="text" value=","/> <input type="text" value="5"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="1"/> <input type="text" value=","/> <input type="text" value="5"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	

### Тема 30. Прямокутний трикутник

30.1. Г. 30.2. Д. 30.3. Б. 30.4. В. 30.5. В. 30.6. Д. 30.7. В. 30.8. А. 30.9. А. 30.10. В. 30.11. Б.  
30.12. Д. 30.13. Г. 30.14. А. 30.15. В. 30.16. Д. 30.17. Б. 30.18. В. 30.19. Г. 30.20. Г. 30.21. В.

30.22					30.23					30.24					30.25				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

30.26	30.27	30.28	30.29	30.30
<input type="text" value="4"/> <input type="text" value="0"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="1"/> <input type="text" value="0"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="5"/> <input type="text" value="3"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="2"/> <input type="text" value="0"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text" value="2"/> <input type="text" value="4"/> <input type="text" value="4"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
30.31	30.32	30.33	30.34	30.35
<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="0"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="5"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text" value="3"/> <input type="text" value="0"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="2"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text" value="6"/> <input type="text" value="0"/> <input type="text" value="0"/> <input type="text" value=","/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
30.36	30.37	30.38	30.39	30.40
<input type="text"/> <input type="text" value="3"/> <input type="text" value=","/> <input type="text" value="3"/> <input type="text" value="6"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="1"/> <input type="text" value="2"/> <input type="text" value=","/> <input type="text" value="2"/> <input type="text" value="5"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text" value="0"/> <input type="text" value=","/> <input type="text" value="6"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="7"/> <input type="text" value=","/> <input type="text" value="5"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text" value="1"/> <input type="text" value="4"/> <input type="text" value="9"/> <input type="text" value=","/> <input type="text" value="7"/> <input type="text" value="6"/> <input type="text"/> <input type="text"/>

### Тема 31. Рівнобедрений трикутник

31.1. Г. 31.2. В. 31.3. Д. 31.4. А. 31.5. Г. 31.6. Б. 31.7. Д. 31.8. В. 31.9. В. 31.10. А. 31.11. В.  
31.12. А. 31.13. Г. 31.14. В. 31.15. А. 31.16. Г. 31.17. Д. 31.18. Г. 31.19. Б. 31.20. Б.



31.21					31.22					31.23					31.24				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1	×				1	×				1	×				1	×			
2				×	2	×				2				×	2			×	
3			×		3				×	3	×				3			×	
4		×			4		×			4		×			4				×

31.25	31.26	31.27	31.28	31.29
8, , , ,	60, , , ,	6, , , ,	4, , , ,	170, , , ,
31.30	31.31	31.32	31.33	31.34
10, , , ,	3, , , ,	7, 8	1, 2	36, , , ,
31.35	31.36	31.37		
72, 45	8, , , ,	7, , , ,		

**Тема 32. Чотирикутники**

32.1. Г. 32.2. Д. 32.3. А. 32.4. Б. 32.5. Б. 32.6. Г. 32.7. В. 32.8. Г. 32.9. Д. 32.10. А. 32.11. В.  
 32.12. Д. 32.13. Б. 32.14. Д. 32.15. В. 32.16. Г. 32.17. Д. 32.18. В. 32.19. А. 32.20. Г. 32.21. Б.  
 32.22. Д. 32.23. Г. 32.24. Б.

32.25					32.26					32.27					32.28				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1			×		1	×				1	×				1			×	
2	×				2				×	2			×		2	×			
3				×	3	×				3	×				3			×	
4				×	4			×		4			×		4				×

32.29	32.30	32.31	32.32	32.33
300, , , ,	18, , , ,	9, , , ,	30, , , ,	32, , , ,
32.34	32.35	32.36	32.37	32.38
19, 2	1, 5	21, , , ,	204, , , ,	45, , , ,
32.39	32.40	32.41	32.42	32.43
96, , , ,	12, , , ,	9, , , ,	0, 83	48, , , ,
32.44	32.45			
40, , , ,	6, 89			

**Тема 33. Многокутники**

33.1. Д. 33.2. А. 33.3. В. 33.4. А. 33.5. Г. 33.6. В. 33.7. Г. 33.8. Г. 33.9. А. 33.10. Д. 33.11. Д.  
 33.12. Г. 33.13. А. 33.14. Б. 33.15. В. 33.16. В. 33.17. Б. 33.18. Б. 33.19. В. 33.20. Г.

33.21					33.22					33.23				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1			×		1			×		1	×			
2				×	2			×		2			×	
3	×				3	×				3	×			
4		×			4	×				4				×

33.24	33.25	33.26	33.27	33.28
<input type="text"/> <input type="text"/> 6, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 5, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 6, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 900, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 20, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
33.29	33.30	33.31	33.32	33.33
<input type="text"/> <input type="text"/> 8, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 2, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 1, <input type="text"/> 5 <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 72, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 0, <input type="text"/> 5 <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
33.34				
<input type="text"/> <input type="text"/> 1, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>				

**Тема 34. Коло, круг і їх елементи**

34.1. В. 34.2. Б. 34.3. Д. 34.4. Д. 34.5. Б. 34.6. Г. 34.7. А. 34.8. Б. 34.9. Б. 34.10. Д. 34.11. А.  
34.12. В. 34.13. В. 34.14. Б. 34.15. В. 34.16. Г. 34.17. Д. 34.18. Д. 34.19. Г. 34.20. А.

34.21	34.22	34.23
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д
1 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
3 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>

34.24	34.25	34.26	34.27	34.28
<input type="text"/> <input type="text"/> 12, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 15, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 2, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 27, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 27, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
34.29	34.30	34.31	34.32	34.33
<input type="text"/> <input type="text"/> 0, <input type="text"/> 75 <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 0, <input type="text"/> 5 <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 10, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 0, <input type="text"/> 75 <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 0, <input type="text"/> 07 <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>

**Тема 35. Прямі і площини в просторі**

35.1. В. 35.2. Д. 35.3. Б. 35.4. Д. 35.5. Д. 35.6. В. 35.7. Г. 35.8. В. 35.9. А. 35.10. В. 35.11. Д.  
35.12. А. 35.13. Д. 35.14. Г. 35.15. В. 35.16. Г. 35.17. Д. 35.18. Б. 35.19. В. 35.20. А. 35.21. Г.  
35.22. Г.

35.23	35.24	35.25	35.26
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д
1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
3 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
4 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
35.27	35.28	35.29	
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	
1 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	

35.30	35.31	35.32	35.33	35.34
<input type="text"/> <input type="text"/> 4, <input type="text"/> 8 <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 3, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 24, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 2, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 5, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
35.35	35.36	35.37	35.38	35.39
<input type="text"/> <input type="text"/> 3, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 3, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 8, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 60, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 12, <input type="text"/> 5 <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
35.40	35.41	35.42	35.43	35.44
<input type="text"/> <input type="text"/> 36, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 1, <input type="text"/> 30 <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 28, <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 2, <input type="text"/> 5 <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> 3, <input type="text"/> 75 <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>

### Тема 36. Призма

36.1. Д. 36.2. Г. 36.3. Д. 36.4. Д. 36.5. Б. 36.6. А. 36.7. Г. 36.8. Г. 36.9. Д. 36.10. Д. 36.11. В.  
 36.12. Г. 36.13. Б. 36.14. В. 36.15. В. 36.16. Б. 36.17. В. 36.18. Д. 36.19. А. 36.20. Д. 36.21. В.  
 36.22. А.

36.23					36.24						
	А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

36.25	36.26	36.27	36.28	36.29
7 2 ,	3 0 ,	4 , 5	4 ,	4 8 ,
36.30	36.31	36.32	36.33	36.34
8 ,	3 5 0 ,	1 0 8 ,	3 2 ,	2 0 0 ,
36.35	36.36			
1 2 6 ,	4 8 ,			

### Тема 37. Піраміда

37.1. Б. 37.2. Д. 37.3. В. 37.4. А. 37.5. Д. 37.6. Д. 37.7. В. 37.8. А. 37.9. Г. 37.10. В. 37.11. Б.  
 37.12. А. 37.13. А. 37.14. Б. 37.15. Д. 37.16. Б. 37.17. Д. 37.18. А. 37.19. Б. 37.20. Д. 37.21. Г.  
 37.22. Б.

37.23					37.24					37.25					37.26					37.27									
	А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

37.28	37.29	37.30	37.31	37.32
1 2 ,	6 ,	2 4 ,	1 ,	3 ,
37.33	37.34	37.35	37.36	37.37
6 0 ,	0 , 5	9 6 ,	0 , 7 5	7 ,
37.38	37.39	37.40	37.41	
0 , 6	3 ,	7 ,	9 ,	

### Тема 38. Циліндр

38.1. Г. 38.2. В. 38.3. Д. 38.4. Б. 38.5. Г. 38.6. Б. 38.7. Д. 38.8. В. 38.9. Б. 38.10. Д. 38.11. А.  
 38.12. Г. 38.13. В. 38.14. Г. 38.15. Б. 38.16. Б. 38.17. А. 38.18. А. 38.19. Б. 38.20. Д.

38.21					38.22					38.23							
	А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д		А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

38.24	38.25	38.26	38.27	38.28
3 0 ,	8 ,	6 0 ,	4 ,	0 , 5
38.29	38.30	38.31	38.32	38.33
4 0 ,	0 , 2 5	1 ,	4 0 ,	1 2 0 ,

**Тема 39. Конус**

39.1. Д. 39.2. Б. 39.3. Б. 39.4. А. 39.5. Д. 39.6. А. 39.7. Г. 39.8. Д. 39.9. Б. 39.10. Д. 39.11. Г. 39.12. А. 39.13. А. 39.14. Б. 39.15. В. 39.16. В. 39.17. Г. 39.18. Д. 39.19. Д. 39.20. Г. 39.21. Б.

39.22	39.23	39.24
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д
1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
3 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

39.25	39.26	39.27	39.28	39.29
5 0 ,	0 , 9	1 ,	1 1 ,	9 ,
39.30	39.31	39.32	39.33	39.34
0 , 2 5	4 ,	5 0 4 ,	1 , 5	2 8 8 ,
39.35	39.36	39.37		
6 , 2 5	5 ,	2 ,		

**Тема 40. Куля**

40.1. Г. 40.2. В. 40.3. Г. 40.4. Б. 40.5. Д. 40.6. В. 40.7. А. 40.8. Г. 40.9. Б. 40.10. Г. 40.11. Б. 40.12. В. 40.13. Д. 40.14. Б. 40.15. Б. 40.16. А. 40.17. Г. 40.18. А. 40.19. В. 40.20. В. 40.21. Г.

40.22	40.23	40.24	40.25	40.26
А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д	А Б В Г Д
1 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	4 <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>

40.27	40.28	40.29	40.30	40.31
6 7 6 ,	6 7 6 ,	1 3 ,	3 ,	1 5 ,
40.32	40.33	40.34	40.35	40.36
1 , 2	2 ,	3 ,	4 ,	2 ,

**Тема 41. Координати**

41.1. Г. 41.2. В. 41.3. Г. 41.4. Б. 41.5. Д. 41.6. А. 41.7. В. 41.8. Г. 41.9. А. 41.10. В. 41.11. Д. 41.12. Д. 41.13. Б. 41.14. Г. 41.15. В. 41.16. Д. 41.17. Г. 41.18. В. 41.19. Г. 41.20. В. 41.21. В.

<b>41.22</b>					<b>41.23</b>					<b>41.24</b>				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1			×		1			×		1	×			
2		×			2	×				2			×	
3	×				3		×			3				×
4				×	4				×	4		×		

<b>41.25</b>	<b>41.26</b>	<b>41.27</b>	<b>41.28</b>	<b>41.29</b>
<input type="text" value="5"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="-7"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="24"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="15"/> , <input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="2"/> , <input type="text"/>
<b>41.30</b>	<b>41.31</b>			
<input type="text" value="5"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="14"/> , <input type="text"/>			

**Тема 42. Вектори**

42.1. Г. 42.2. В. 42.3. В. 42.4. Г. 42.5. А. 42.6. Б. 42.7. Д. 42.8. Г. 42.9. Г. 42.10. Д. 42.11. Б.  
 42.12. Б. 42.13. Б. 42.14. Г. 42.15. В. 42.16. В. 42.17. Д. 42.18. Б. 42.19. Б. 42.20. Г. 42.21. Б.  
 42.22. А. 42.23. А. 42.24. Б.

<b>42.25</b>					<b>42.26</b>					<b>42.27</b>					<b>42.28</b>				
А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
1		×			1		×			1		×			1			×	
2				×	2		×			2		×			2			×	
3				×	3			×		3				×	3			×	
4			×		4			×		4			×		4				×

<b>42.29</b>	<b>42.30</b>	<b>42.31</b>	<b>42.32</b>	<b>42.33</b>
<input type="text" value="20"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="22"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="-1"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="212"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text" value="19"/>
<b>42.34</b>	<b>42.35</b>	<b>42.36</b>	<b>42.37</b>	<b>42.38</b>
<input type="text" value="5"/> , <input type="text" value="57"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text" value="83"/>	<input type="text" value="-2"/> , <input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="25"/> , <input type="text"/>	<input type="text" value="45"/> , <input type="text"/>
<b>42.39</b>	<b>42.40</b>	<b>42.41</b>	<b>42.42</b>	
<input type="text" value="3"/> , <input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text" value="65"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text" value="45"/>	<input type="text" value="0"/> , <input type="text" value="99"/>	

## ЗМІСТ

Передмова.....	3
«Золоті правила» досягнення максимально можливого для Вас результату на ЗНО.....	4
Як працювати з тестовим зошитом.....	5
Це варто знати.....	5

### РОЗДІЛ 1

Шановні випускники!.....	6
Зошит 1.....	7
Зошит 2.....	23

### РОЗДІЛ 2

#### АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Тема 1. Обчислення. Арифметичні задачі.....	42
Тема 2. Відсотки.....	51
Тема 3. Цілі вирази.....	58
Тема 4. Дробово-раціональні вирази.....	65
Тема 5. Ірраціональні вирази.....	73
Тема 6. Логарифмічні та показникові вирази.....	82
Тема 7. Тригонометричні вирази.....	90
Тема 8. Цілі раціональні рівняння.....	101
Тема 9. Цілі раціональні нерівності.....	108
Тема 10. Дробові раціональні рівняння.....	115
Тема 11. Дробові раціональні нерівності.....	122
Тема 12. Ірраціональні рівняння.....	129

Тема 13. Ірраціональні нерівності.....	136
Тема 14. Показникові рівняння .....	142
Тема 15. Показникові нерівності.....	149
Тема 16. Логарифмічні рівняння.....	156
Тема 17. Логарифмічні нерівності.....	162
Тема 18. Тригонометричні рівняння.....	168
Тема 19. Тригонометричні нерівності .....	178
Тема 20. Системи рівнянь .....	185
Тема 21. Арифметична та геометрична прогресії.....	194
Тема 22. Елементарні функції та їхні властивості.....	203
Тема 23. Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень.....	215
Тема 24. Похідна функції, її геометричний і механічний зміст .....	226
Тема 25. Застосування похідної для дослідження функцій .....	237
Тема 26. Первісна. Інтеграл .....	247
Тема 27. Елементи комбінаторики.....	257
Тема 28. Початки теорії ймовірностей та елементи статистики .....	266

## ГЕОМЕТРІЯ

Тема 29. Трикутник .....	276
Тема 30. Прямокутний трикутник.....	285
Тема 31. Рівнобедрений трикутник.....	292
Тема 32. Чотирикутники .....	299
Тема 33. Многокутники .....	307
Тема 34. Коло, круг та їх елементи .....	312
Тема 35. Прямі та площини в просторі.....	319
Тема 36. Призма.....	331
Тема 37. Піраміда.....	337

Тема 38. Циліндр.....	345
Тема 39. Конус .....	351
Тема 40. Куля .....	357
Тема 41. Координати .....	363
Тема 42. Вектори.....	368
Відповіді до тематичних завдань (алгебра та початки аналізу) .....	377
Відповіді до тематичних завдань (геометрія) .....	391



**Навчальне видання**

*Капіносів Анатолій Миколайович  
Білоусова Галина Миколаївна  
Гап'юк Галина Володимирівна  
Мартинюк Сергій Володимирович  
Олійник Лариса Іванівна  
Ульшин Петро Іванович  
Чиж Олег Йосипович*

## **МАТЕМАТИКА**

**Посібник  
для підготовки  
до зовнішнього незалежного оцінювання**

Літературний редактор *Людмила Олійник*  
Обкладинка *Оксани Корнєвої*

Підписано до друку 26.12.2009. Формат 70×100/16. Папір газетний.  
Гарнітура Times. Друк офсетний. 33,25 ум. др. арк., 29,84 обл.-вид. арк.  
Тираж 3 000. Замовлення №09-573.  
Редакція газети «Підручники і посібники». Свідоцтво ТР №189 від 10.01.96.  
46010, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6-А.  
Тел. 8-(0352)-43-15-15; 43-10-21, 43-10-31. E-mail: pp@pp.utel.net.ua  
www.pp.utel.net.ua



# Видавництво «Підручники і посібники» пропонує видання для підготовки до ЗНО



## КОМПАКТ-ДИСКИ

За матеріалами посібників створено комп'ютерну програму, яка дає можливість користувачеві здійснити тематичну перевірку знань з усіх тем шкільного курсу.

Перевагою програми є можливість отримати підказку, повторно виконати подані тести, також дібрати завдання в автоматичному режимі. Її можна використовувати для поточного та підсумкового контролю навчальних досягнень, для самостійної роботи.



### Книга поштою

46011, Тернопіль 11, а/с 376  
Тел. для довідки (0352) 42-43-76

**Замовляйте літературу видавництва  
за тел. 8(0352)43-10-21, 43-15-15**

ISBN 978-966-07-1452-6



9 789660 714526 3 1 2 0 9